普通高等教育“十三五”规划教材

线性代数

王宽程　杨英钟　高小明　编著

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

清华大学出版社

线 性 代 数

王宽程　杨英钟　高小明　编著

清 华 大 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书从应用型本科院校的教学实际要求出发，有针对性地选取内容，分层次安排习题，全书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值、二次型、线性空间与线性变换共 6 章. 并安排了用 MATLAB 求解相关问题的内容.

本书适合普通高等院校理工类、经管类等专业教学使用.

版权所有，侵权必究. 侵权举报电话：010-62782989　13701121933

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/王宽程，杨英钟，高小明编著. —北京：清华大学出版社，2018
ISBN 978-7-302-50905-9

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①王…　②杨…　③高…　Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材　Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 189275 号

责任编辑： 刘　颖
封面设计： 傅瑞学
责任校对： 赵丽敏
责任印制： 董　瑾

出版发行： 清华大学出版社
网　　址： http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址： 北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编：** 100084
社 总 机： 010-62770175　　**邮　　购：** 010-62786544
投稿与读者服务： 010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈： 010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者： 三河市君旺印务有限公司
经　　销： 全国新华书店
开　　本： 185mm×260mm　　**印　　张：** 12.5　　**字　　数：** 302 千字
版　　次： 2018 年 9 月第 1 版　　**印　　次：** 2018 年 9 月第1 次印刷
定　　价： 29.80 元

产品编号：081083-01

前　言

线性代数是大学数学教育中的一门重要基础课程.通过对线性代数课程的学习,学生们不仅可以掌握该课程的基本知识理论,更重要的是可以培养学生的抽象思维和逻辑推理能力以及利用矩阵等工具解决专业中遇到的实际问题的能力.

传统的线性代数教材存在不适应计算机时代大学生能力提升的诸多不利方面,因此,改革线性代数教材的编写理念,融入数学实验的思想与内容,切合时代节拍成为本书编写的一个良好动机.我们认为,让学生应用数学知识并通过使用计算机来解决实际问题是数学教育中非常值得重视的环节.

本书共分六个章节.第1章主要介绍了行列式的基本概念和行列式的计算,并包含了行列式的一个应用——克莱姆法则;第2章介绍了矩阵的运算、可逆矩阵、矩阵的初等变换、分块矩阵和矩阵的秩的概念以及有关性质;第3章讨论了n维向量的线性关系和向量组的秩的概念,并在此基础上讨论了线性方程组解的结构;第4章介绍了方阵的特征值和特征向量以及矩阵相似的概念;第5章介绍了实二次型的概念和化二次型为标准形的方法,并讨论了正定二次型的相关性质;第6章介绍了线性空间与线性变换的基本概念和性质.为便于读者掌握各部分的基本内容,我们在每节中穿插有若干练习题,作为基本训练之用;并在主要章节中增加了用MATLAB处理线性代数有关运算的数学实验内容.章末附有习题,书后附有习题的参考答案,供读者参考.

本书可作为高等院校工科、理科(非数学专业)与经济管理学科线性代数课程的教材,课内32～64学时的都可以选用.某些章节不同专业可根据不同情况予以取舍.

本书第1、3章由王宽程编写,第2、4章由高小明编写,第5、6章由杨英钟编写.王宽程完成了全书的统稿工作,杨英钟完成了全书的审阅工作.

我们感谢参考文献中所列著作的诸位作者,本书从他们的著作中得到许多有益的启示,并采纳了其中若干优秀的例题、习题和一些生动有趣的应用实例,极大地丰富了本书的内容.

由于作者水平有限,书中一定会有许多错、漏及考虑不周之处,我们热切希望使用本书的教师和同学予以指正,以便再版时修订.我们在此致以谢意.

编者

2018年6月

目　　录



第 1 章

行　列　式

行列式是研究线性代数的一个重要工具,它在数学的许多分支以及其他自然科学方面有着广泛的应用.本章先介绍二阶、三阶行列式,然后归纳给出 n 阶行列式的定义,进而讨论其性质和计算方法,最后介绍用行列式解线性方程组的克莱姆法则.

1.1　二阶、三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,称为**二阶行列式**,简记为 D,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

二阶行列式含有两行两列,横排的称为行,竖排的称为列.数 a_{ij}($i=1,2$;$j=1,2$)称为行列式的元素,其中 i 为行标,j 为列标.元素 a_{ij} 位于行列式的第 i 行,第 j 列.二阶行列式有四个元素分别是 a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}.

二阶行列式表示的代数和,可以用画线(参见图 1.1)的方法帮助记忆,即实线连结的两个元素的乘积减去虚线连结的两个元素的乘积.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图　1.1

例 1　计算二阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$.

解　$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=2\times 4-(-1)\times 5=13.$

例 2　设 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & 2 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}$,问 λ 为何值时 $D=0$.

解　$D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & 2 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda=\lambda(\lambda-2).$

由 $D=0$ 得，$\lambda(\lambda-2)=0$，则 $\lambda=0,\lambda=2$.

因此可得，当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$ 时，$D=0$.

1.1.2 三阶行列式

类似于二阶行列式，我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

称为**三阶行列式**，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

三阶行列式含有三行三列，是6项的代数和，可以用(对角线法则)画线(参见图1.2)的方法帮助记忆.其中各实线连结的三个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线连结的三个元素的乘积是代数和中的负项.

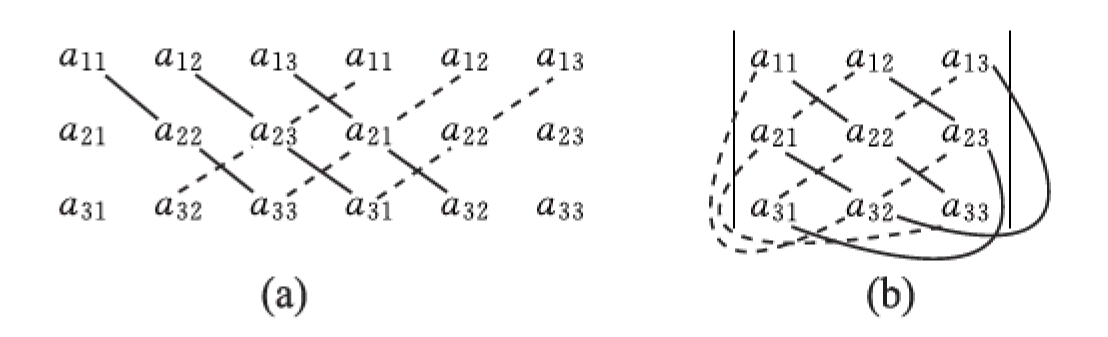


图 1.2

例3 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

解 按对角线法则，有

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}=1\times0\times6+3\times4\times(-1)+2\times5\times0-1\times4\times0-3\times5\times6-2\times0\times(-1)$$
$$=-102.$$

例4 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \\ -b & a & 0 \end{vmatrix}$，问 a,b 满足什么条件时 $D=0$.

解 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \\ -b & a & 0 \end{vmatrix}=a^2+b^2$.

要使 $D=0$，则 a,b 必须同时等于0.因此，当 $a=0$ 且 $b=0$ 时 $D=0$.

习题 1-1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$；　　(6) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

2. 解下列方程：

(1) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 \\ x & 2 \end{vmatrix}=0$；　　(2) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}=0$.

1.2 n 级排列

为了给出 n 阶行列式的定义，以及确定行列式中每一项所应取的符号，在这里我们研究一下 n 级排列的性质和有关定理.

定义 1.1 由数码 $1,2,\cdots,n$ 所组成的一个有序数组，称为一个 **n 级排列**.

排列是有序数组，所以组成排列数码的顺序不同就是不同的排列，例如 123 和 231 就是不同的三阶排列. 不同的 n 阶排列有多少个呢？n 阶排列的一般形式可以表示为 $j_1j_2\cdots j_n$，其中 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 为数 $1,2,\cdots,n$ 中某一个数，且互不相同，这时 $j_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 的下标 k 表示 j_k 排在 n 阶排列从左到右的第 k 个位置上. 这样按 n 阶排列的定义知，j_1 可有 n 种选取(在 n 个数码中任选一个)，j_2 有 $n-1$ 种选取(去掉 j_1，在余下的 $n-1$ 个数码中任选一个)，……，j_{n-1} 可有 2 种选取(去掉 $j_1,j_2,\cdots,j_{n-2}$，在余下的 2 个数码中任选一个)，而 j_n 只能取余下的那个数码，故 n 阶排列一共有

$$n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1=n!$$

个. 例如三阶排列共有 $3!=6$ 个，分别是：

123，　132，　213，　231，　312，　321.

定义 1.2 在一个排列中，若有某个较大的数排在某个较小的数的前面，则称这两个数构成一个逆序. 在一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，逆序的总数称为这个排列的**逆序数**，记为 $N(j_1j_2\cdots j_n)$.

例如，5 级排列 35412 有 7 个逆序，4 级排列 1324 有一个逆序.

下面寻求计算排列逆序数的方法. 先看一个例子，排列 35412 构成逆序的数对有

31，　32；

54，　51，　52；

41，　42.

因而 35412 的逆序数为

$$\begin{aligned}&2(3\text{ 的后面比 }3\text{ 小的数的个数})+\\&3(5\text{ 的后面比 }5\text{ 小的数的个数})+\\&2(4\text{ 的后面比 }4\text{ 小的数的个数})+\\&0(1\text{ 的后面比 }1\text{ 小的数的个数})=7,\end{aligned}$$

所以 $N(35412)=7$.

由此得出计算排列的逆序数的一个方法：

$$\begin{aligned}N(j_1j_2\cdots j_n)=&N_1(j_1\text{ 的后面比 }j_1\text{ 小的数的个数})+\\&N_2(j_2\text{ 的后面比 }j_2\text{ 小的数的个数})+\cdots+\\&N_{n-1}(j_{n-1}\text{的后面比 }j_{n-1}\text{小的数的个数}).\end{aligned}$$

例如，在排列 3657214 中，在 3 的后面比 3 小的数有 2 个，在 6 的后面比 6 小的数有 4 个，在 5 的后面比 5 小的数有 3 个，在 7 的后面比 7 小的数有 3 个，在 2 的后面比 2 小的有 1 个，所以

$$N(3657214)=2+4+3+3+1=13.$$

$12\cdots n$ 所构成的 n 级排列，是按自然数的顺序由小到大进行排列的，我们称它**自然顺序排列**，容易看出自然顺序排列的逆序数为 0，即 $N(12\cdots n)=0$.

在上例中，我们看到有的排列的逆序数是奇数，而有的排列的逆序数是偶数.

定义 1.3 在一个排列中，若它的逆序数是奇数，则称这个排列是**奇排列**；若它的逆序数是偶数，则称这个排列是**偶排列**.

例如，3 级排列 231 的逆序数 $N(231)=2$，所以它是一个偶排列；5 级排列 35412 的逆序数 $N(35412)=7$，是个奇数，所以它是一个奇排列；自然顺序排列 $123\cdots n$ 的逆序数 $N(12\cdots n)=0$，因此它是一个偶排列.

将一个排列中某两个数码的位置互换，而其余数码不动，就得到另一个排列，这样的变换称为**对换**.

例如，排列 1324 经过 3，4 对换，变成了排列 1423. 原来排列的逆序数是 1，为奇排列，经过对换 3，4 后的排列的逆序数是 2，为偶排列. 又如排列 1357624 经过 5，2 对换变为排列 1327654，原来排列的逆序数是 8，为偶排列，经过对换 5，2 后的排列的逆序数是 7，为奇排列. 在一个排列中，经过一次对换之后改变了原来排列的奇偶性. 由下面的定理知道，这是一个普遍的规律.

定理 1.1 任一排列，经过一次对换后排列的奇偶性改变.

证 首先看在一个排列中互换相邻的两个数的情形. 设已给排列为

$$\cdots ij\cdots,$$

经过 i,j 的对换，变成排列

$$\cdots ji\cdots,$$

其中“…”表示除 i,j 之外其余不动的数. 比较一下这两个排列的逆序数，由于“…”中各数的位置保持不变，因此在上述两个排列中，i 或 j 与前面和后面“…”中各数所构成的逆序也相同，所不同的只是改变了 i 与 j 的顺序. 于是当 $i<j$ 时，新排列比原排列的逆序数多了一个；当 $i>j$ 时，新排列比原排列的逆序数少了一个，所以这两个排列的奇偶性相反.

现在，看一般情形. 设 i 与 j 之间有 s 个数，即排列为

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots,$$

经过 i 与 j 的对换,变成排列

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots,$$

这样一个对换,我们可以把它看作在原排列中先让 j 与 k_s 对换,再与 k_{s-1} 对换,……,最后与 i 对换;总共经过 $s+1$ 次相邻两数的对换,变成排列

$$\cdots jik_1k_2\cdots k_s\cdots,$$

然后,再让 i 与 k_1 对换,再与 k_2 对换,……,最后与 k_s 对换,总共经过 s 次相邻两数的对换,最后变成排列

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots,$$

它正是排列"$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots$"经过 i 与 j 的对换所得到的排列. 因此,i 与 j 的对换总共通过 $2s+1$ 次相邻两数的对换而得到. 上面已经证明对换相邻两数改变排列的奇偶性,而 $2s+1$ 为奇数,所以,经过奇数次相邻两数的对换改变原排列的奇偶性.

习题 1-2

1. 写出 4 个数码 1,2,3,4 的所有 4 阶排列.
2. 分别计算下列 4 个 4 阶排列的逆序数,然后指出奇排列是(　　).

A. 4321　　B. 4132　　C. 1342　　D. 2314

3. 求下列排序的逆序数:

(1) 41253 ;　(2) 3712456;　(3) 36715284;　(4) $n(n-1)\cdots21$.

1.3　n 阶行列式的定义

先来剖析二阶、三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

其共同特征可概括如下:

(1) 二阶行列式是 $2!=2$ 项的代数和,其中每一项是取自不同行不同列的两个元素的乘积. 三阶行列式是 $3!=6$ 项的代数和,其中每一项是取自不同行不同列的三个元素的乘积,且任意三个不同行不同列的元素的乘积都是展开式中的一项.

(2) 代数和中每一项的正负号是这样决定的:当每一项行标按自然顺序排列时,由列指标组成排列的奇偶性确定,偶者为正,奇者为负.

据此,我们可将二阶行列式、三阶行列式分别定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{N(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对 1,2 这两个数所有排列(共 2! 项)取和, $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对 1,2,3 这三个数所有排列(共 3! 项)取和.

根据以上规律,我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.4 由 n^2 个数,排成 n 行 n 列,记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称其为 **n 阶行列式**,其中 a_{ij} 代表第 i 行第 j 列的数(称为元素)$(i,j=1,2,\cdots,n)$, i,j 分别称为元素 a_{ij} 的**行标**和**列标**. n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和,此代数和共有 n! 项,每项的符号是这样确定的:当这一项的 n 个元素的行标按自然顺序排列好之后,它的列标构成一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$,若该 n 级排列是偶排列,那么这一项取正号;是奇排列,则取负号,即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.1}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数组成的所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$(共 n! 项)求和. $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的**一般项**.

当 $n=2$ 或 $n=3$ 时,就是二阶行列式或三阶行列式. 特别地,当 $n=1$ 时,一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

为方便计算, n 阶行列式(1.1)可简记为 $D=|a_{ij}|_n$.

例 1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 这是一个 4 阶行列式,在展开式中应该有 4! =24 项. 但是由于出现很多的零,所以不等于零的项数就大大减少了. 我们具体地来看一下. 展开式中项的一般形式是

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$

显然,如果 $j_1\neq 4$,那么 $a_{1j_1}=0$,从而这个项就等于零. 因此只需考虑 $j_1=4$ 的那些项;同理,只需考虑 $j_2=3, j_3=2, j_4=1$ 这些列指标的项. 这就是说,行列式中不为零的项只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 这一项,而 $N(4321)=6$,这一项前面的符号应该是正的. 所以

$$原式=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&3&0&0\\4&0&0&0\end{vmatrix}=1\times2\times3\times4=24.$$

例 2 计算行列式

$$\begin{vmatrix}a&b&c&d\\e&f&g&h\\x&y&0&0\\u&v&0&0\end{vmatrix}.$$

解 这是一个 4 阶行列式，在展开式中应该有 $4!=24$ 项. 但只有以下 4 项为非零.

$$chxv,chyu,dgxv,dgyu.$$

与这 4 项相对应的列标的 4 级排列分别为 3412，3421，4312 和 4321，对应的逆序总数分别为：$N(3412)=4$，$N(3421)=5$，$N(4312)=5$，$N(4321)=6$，所以第一项和第四项取正号，第二项和第三项取负号，即

$$\begin{vmatrix}a&b&c&d\\e&f&g&h\\x&y&0&0\\u&v&0&0\end{vmatrix}=chxv-chyu-dgxv+dgyu.$$

例 3 求下列行列式的值

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

这个行列式称为**上三角形行列式**，它的特点是当 $i>j$ 时 $a_{ij}=0$，或者说这个行列式主对角线(即 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所占的一条对角线)以下的元素都等于零.

解 由行列式的定义知，D 的展开式共有 $n!$ 项，其展开式中的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

而乘积当中只要有一个元素为零，乘积就为零，所以只需取乘积不为零的项即可. 由于一般项中 a_{nj_n} 取自 D 的第 n 行，而第 n 行除 a_{nn} 外，其余元素全为零，故若 $j_n\neq n$，则对应的行列式展开式中那一项一定为零，求和时该项可不计，为此只要考虑 $j_n=n$ 的项. 同样由于 D 的第 $n-1$ 行中除 $a_{n-1,n-1}$ 及 $a_{n-1,n}$ 外，其余元素全为零，且 j_n 已取 n，从而只能取 $j_{n-1}=n-1$. 以此类推，$j_2=2$，$j_1=1$. 所以行列式中不为 0 的项只能是 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 又因列标的 n 级排列的逆序数 $N(123\cdots n)=0$，所以

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理可计算出下三角形行列式(当 $i<j$ 时 $a_{ij}=0$ 的行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

定理 1.2 n 阶行列式的一般项可以写为

$$(-1)^{m+l}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列,m 和 l 分别为排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

证 在乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中,交换任意两个元素的位置,那么两个下标所对应的 n 级排列也同时变换,由定理 1.1 可知,排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数将同时改变奇偶性,于是和式 $m+l$ 的奇偶性不变.这样,经过有限次交换两个元素的位置,使乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中元素的行标调换成按自然顺序 $12\cdots n$ 排列,而设此时所对应的列标的 n 级排列为 $s_1s_2\cdots s_n$,则有

$$\begin{aligned}(-1)^{m+l}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}&=(-1)^{N(12\cdots n)+N(s_1s_2\cdots s_n)}a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n}\\&=(-1)^{N(s_1s_2\cdots s_n)}a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n}.\end{aligned}$$

上式利用了 $N(12\cdots n)=0$.

有了定理 1.2,在 n 阶行列式的定义 1.4 中,如果我们把行列式的一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中元素的列标调换成按自然顺序 $12\cdots n$ 排列,而此时相应的行标的 n 级排列为 $i_1i_2\cdots i_n$,那么行列式的定义又可叙述为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}, \qquad (1.2)$$

其中 $\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数组成的所有排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 求和.

习题 1-3

1. 用行列式定义计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

2. 在 6 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中,下列各元素乘积应取什么符号?

(1) $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$; (2) $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$; (3) $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$.

3. 选择 k, l 使 $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$ 成为 5 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中带有负号的项.

4. 设 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上元素为零,证明该行列式为零.

1.4 行列式的性质

直接根据定义来计算 n 阶行列式往往比较麻烦,本节介绍行列式的一些主要性质,利用这些性质,可以使行列式的计算大大简化.

定义 1.5 将行列式 D 的行与列互换,得到的行列式,称为 D 的**转置行列式**,记作 D^{T},即设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1 将行列式转置,行列式的值不变,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证 记 D 的一般项中 n 个元素的乘积为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

这 n 个元素位于 D 的不同的行和不同的列,因而它也位于 D^{T} 的不同的列和不同的行,在 D^{T} 中应为

$$a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n},$$

所以它也是 D^{T} 的一项. 反之,D^{T} 的每一项也是 D 的一项,即 D 和 D^{T} 有相同的项. 再由公式(1.1)和公式(1.2)可知这两项的符号也相同,所以 $D^{\mathrm{T}}=D$.

性质 1 说明,在行列式中行与列的地位是平等的,行列式的性质对行成立的对列也成立,反之亦然.

例如

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=10, \quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}=10.$$

性质 2 如果行列式的某一行(列)的每一个元素都可以表示为两个元素之和,那么这个行列式可以表示为两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

或

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i}+c_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2i}+c_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni}+c_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & c_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 只就行的情形证明. 由 n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{i-1,j_{i-1}}(b_{ij_i}+c_{ij_i})a_{i+1,j_{i+1}}\cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{i-1,j_{i-1}}b_{ij_i}a_{i+1,j_{i+1}}\cdots a_{nj_n} + \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{i-1,j_{i-1}}c_{ij_i}a_{i+1,j_{i+1}}\cdots a_{nj_n}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如

$$\begin{vmatrix} 5 & 11 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+3 & 5+6 & 1+4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10.$$

推论 如果行列式某一行(列)的每个元素都可写成 m(m 为大于 2 的整数)个数的和, 则此行列式可以写成 m 个行列式的和.

性质 3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

或

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 只就行的情形证明. 由 n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{i-1,j_{i-1}}(ka_{ij_i})a_{i+1,j_{i+1}}\cdots a_{nj_n}$$

$$= k\sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{i-1,j_{i-1}}a_{ij_i}a_{i+1,j_{i+1}}\cdots a_{nj_n}$$

$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=12,$$

用 2 乘以 D 的第一行,得

$$\begin{vmatrix} 2\times1 & 2\times2 & 2\times3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=24=2D.$$

推论 行列式的某一行(列)元素全为零,则此行列式为零.

性质 4 将行列式的任意两行(列)对调,行列式仅改变符号,即若设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

或

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D_1=-D$.

证 只就行的情形证明. 记 D 的一般项中 n 个元素的乘积为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}.$$

这 n 个元素在 D 中位于不同的行和不同的列,因而在 D_1 中也位于不同的行和不同的列,所以也是 D_1 的一项. 反之,D_1 的每一项也是 D 的一项,所以 D 和 D_1 有相同的项,且所对应的项绝对值相同.

现在看该项的符号:它在 D 中的符号为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}.$$

由于 D_1 是由交换 D 的 i,k 两行而得到的,所以行标的 n 级排列"$12\cdots i\cdots k\cdots n$"变为 n 级排列"$12\cdots k\cdots i\cdots n$",而列标的 n 级排列并没有发生变化. 因此由定理 1.2,它在 D_1 中的符号为

$$\begin{aligned}(-1)^{N(12\cdots k\cdots i\cdots n)+N(j_1j_2\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}&=(-1)^{1+N(12\cdots i\cdots k\cdots n)+N(j_1j_2\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}\\&=-(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}.\end{aligned}$$

上式利用了 $N(12\cdots i\cdots k\cdots n)=0$. 因此 D 和 D_1 中每一个对应的项绝对值相等,符号相反,即 $D_1=-D$.

例如

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}=-18,\quad 而\quad \begin{vmatrix}2&3&1\\1&2&3\\3&1&2\end{vmatrix}=18.$$

推论 如果行列式有两行(列)元素完全相同,则此行列式为零.

证 设该行列式为 D,交换 D 相同的那两行,由性质 4 可得 $D=-D$,故 $D=0$.

性质 5 行列式的某两行(列)对应元素成比例,则此行列式为零.

证 设 n 阶行列式第 i 行的各元素为第 j 行的对应元素的 k 倍,由性质 3,可以把 k 提到行列式外相乘. 剩下的行列式的第 i 行与第 j 行的两行相同,再由性质 4 的推论得行列式为零.

例如

$$\begin{vmatrix}10&20\\20&40\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1&2&3\\2&4&6\\1&0&2\end{vmatrix}=0.$$

性质 6 把行列式的第 j 行(列)元素的 k 倍加到第 i 行(列)的对应元素上,行列式的值不变.

证 只就行的情形证明. 由行列式的性质,有

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}+ka_{j1}&a_{i2}+ka_{j2}&\cdots&a_{in}+ka_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{由性质 2}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{由性质 3}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{由性质 5}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 1 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal[\text{分别加到第 3、4 行}]{\text{第 1 行的 1 倍、-2 倍}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{分别加到第 3、4 行}]{\text{第 2 行的 1 倍、3 倍}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}\xlongequal[\text{加到第 4 行}]{\text{第 3 行的}-1\text{ 倍}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)\times(-2)\times(-2)=-4.$$

习题 1-4

1. 用行列式的性质计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

2. 把下列行列式化为上三角形行列式,并计算其值:

(1) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 0 & 3 & -4 \\ -3 & 1 & -1 & -5 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

3. 用行列式性质证明:

(1) $\begin{vmatrix} y+z & z+x & x+y \\ x+y & y+z & z+x \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

1.5 行列式按行(列)展开

定义 1.6 在 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中,去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列,余下的 $n-1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij} 的**余子式**,记作 M_{ij}. 在 M_{ij} 的前面添加符号 $(-1)^{i+j}$ 后,称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**,用 A_{ij} 表示. 即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

例如,在 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中,a_{32}的余子式 M_{32} 为

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

a_{32}的代数余子式为 $A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}$. 而 a_{13}的代数余子式是

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

定理 1.3 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它当中任一行(列)的各元素与其代数余子式乘积之和. 即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}, \qquad i=1,2,\cdots,n,$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}, \qquad j=1,2,\cdots,n.$$

证 (1) 讨论 D 的第一行中的元素除 $a_{11}\neq 0$ 外,其余元素均为零的特殊情形,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

因为 D 的每一项都含有第一行的元素,但第一行中仅有 $a_{11}\neq 0$,所以 D 中仅含有下面形式的项

$$(-1)^{N(1j_2\cdots j_n)}a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=a_{11}[(-1)^{N(1j_2\cdots j_n)}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}].$$

等号右端方括号内正是 M_{11} 的一般项，所以 $D=a_{11}M_{11}$，再由 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}$，得到 $D=a_{11}A_{11}$.

(2) 讨论行列式 D 中第 i 行的元素除 $a_{ij}\neq 0$ 外，其余元素均为零的情形，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将 D 的第 i 行依次与第 $i-1,i-2,\cdots,2,1$ 各行互换后，再将第 j 列依次与第 $j-1,j-2,\cdots,2,1$ 各列互换，共经过 $i+j-2$ 次交换行列式 D 的行和列，得

$$D=(-1)^{i+j-2}\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}.$$

(3) 最后讨论一般情形

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由性质 2，性质 3 和上述(2)的结论，可得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+a_{i2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+a_{in}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}.$$

显然这一结果对任意 $i=1,2,\cdots,n$ 均成立.

利用行列式的性质 1,便可得到第二个等式,即

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\qquad j=1,2,\cdots,n.$$

例 1 分别按第一行与第二列展开下列行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&0&-2\\1&1&3\\-2&3&1\end{vmatrix}.$$

解 (1) 按第一行展开

$$D=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&3\\3&1\end{vmatrix}+0\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&3\\-2&1\end{vmatrix}+(-2)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&1\\-2&3\end{vmatrix}$$
$$=1\times(-8)+0+(-2)\times5=-18.$$

(2) 按第二列展开

$$D=0\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&3\\-2&1\end{vmatrix}+1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&-2\\-2&1\end{vmatrix}+3\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&-2\\1&3\end{vmatrix}$$
$$=0+1\times(-3)+3\times(-1)\times5=-3-15=-18.$$

例 2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&1&4\\1&0&3&2\\2&-1&0&0\\1&2&0&-5\end{vmatrix}.$$

解 由于此行列式的第三行或第三列中的零元素比较多,所以将 D 按第三行或第三列展开时,计算会比较简单,不妨将 D 按第三列展开,则应有

$$D=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}+a_{43}A_{43},$$

其中,$a_{13}=1,a_{23}=3,a_{33}=0,a_{43}=0$,而

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&0&2\\2&-1&0\\1&2&-5\end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2&4\\2&-1&0\\1&2&-5\end{vmatrix}=45,$$

所以,$D=1\times(-7)+3\times45+0\times A_{33}+0\times A_{43}=128$.

定理 1.4 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

的某一行(列)元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积的和等于零,即

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0,\quad i\neq s,\quad i,s=1,2,\cdots,n;$$

或

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0,\quad j\neq t,\quad j,t=1,2,\cdots,n.$$

证 用行列式中第 i 行的元素去替换第 s 行对应的元素，得到如下行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i\text{行} \\ \\ s\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

该行列式有两行元素相同，由行列式性质 4 的推论可知，其值为零. 另一方面，我们将此行列式按第 s 行展开，得

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}.$$

因而

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0,\quad i\neq s,\quad i,s=1,2,\cdots,n.$$

利用行列式的性质 1，便得到第二个等式，即

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0,\quad j\neq t,\quad j,t=1,2,\cdots,n.$$

习题 1-5

1. 求行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中元素 2 和 -2 的代数余子式.

2. 已知 4 阶行列式 D 中第三列元素依次为 $-1,2,0,1$，它们的余子式依次分别为 $5,3,-7,4$，求 $D=?$

3. 按第三列展开下列行列式，并计算其值.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c & -1 \\ -1 & 1 & d & 0 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1.6 行列式的计算

在这一节,介绍一些计算行列式的常用方法.一般来说,高于三阶的行列式比较不适合用行列式的定义去计算.因为按照行列式的定义计算行列式时,计算量较大,除非行列式中某一行(列)含有较多的零元素(例如上三角形行列式).因此在具体计算时,总是先运用行列式的性质,将某一行(列)元素尽可能多地化为零,然后利用定理 1.3 依行(列)展开.有时也将行列式化为上(下)三角形行列式,直接给出结果.

(1) 将行列式按某行(列)展开,这样原来的行列式就化成了较低阶行列式的计算.另外如果某行(列)零元素比较多,那么该行列式也适合按该行(列)展开,这样计算起来就简便很多.

为了表述简便,我们将第 i 行(列)的 k 倍加到第 j 行(列)上记为 $r_j+kr_i(c_j+kc_i)$,将第 i 行(列)与第 j 行(列)交换记为 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$,将第 i 行(列)乘以 k 记为 $kr_i(kc_i)$.

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal[c_4+c_3]{c_1-2c_3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}=40.$$

例 2 计算 $n+2$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=a\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}+(-1)^{1+n+2}\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=a^{n+2}+(-1)^{n+3}(-1)^{n+1+1}\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=a^{n+2}+(-1)^{2n+5}a^n=a^n(a^2-1).$$

例 3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}.$$

解 方法 1

$$D=a_n\times(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}+$$

$$a_{n-1}\times(-1)^{n+2}\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}+\cdots+$$

$$(a_1+x)\times(-1)^{n+n}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_2x^{n-2}+(a_1+x)x^{n-1}$$

$$=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_2x^{n-2}+a_1x^{n-1}+x^n.$$

方法 2 将原行列式第 n 列乘以 x 加到第 $n-1$ 列，得

$$D=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & & a_2+(a_1+x)x & a_1+x \end{vmatrix}.$$

然后将新得的第 $n-1$ 列乘以 x 加到第 $n-2$ 列，再将新得的第 $n-2$ 列乘以 x 加到第 $n-3$ 列，……，再将新得的第 2 列乘以 x 加到第 1 列，最后按第 1 列展开，得

$$D=(-1)^{n+1}(a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_1x^{n-1}+x^n)\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}\cdot(-1)^{n+1}(a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_1x^{n-1}+x^n)$$

$$=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_1x^{n-1}+x^n.$$

例 4 计算上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 将行列式依次按第 1 列展开，得

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 把行列式化成上(下)三角形行列式.

例 5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

解
$$D=\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+2r_1,r_3+\frac{3}{2}r_1,r_4+r_1}\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & -8 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-\frac{4}{3}r_2,r_4-\frac{2}{3}r_2}\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{29}{3} \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{13}{4}r_3}\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{29}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{135}{4} \end{vmatrix}$$

$$=(-2)\times 3\times\left(-\frac{4}{3}\right)\times\left(-\frac{135}{4}\right)=-270.$$

例 6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}.$$

解 将原行列式的各列分别提取公因式子 1,2,…,n,得

$$D=n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{第 }2,3,\cdots,n\text{ 行}]{\text{第 1 行分别加到}} n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}=n!.$$

例 7 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解 将原行列式的后 n 列全加到第 1 列,再从第 1 列提取公因式 $x+\sum_{i=1}^{n}a_i$,得

$$D=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{分别加到第 }2,3,\cdots,n+1\text{ 列}]{\text{第 1 列乘 }-a_1,-a_2,\cdots,-a_n} \left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n).$$

例 8 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} -b_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_n & b_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 将原行列式的第 1,2,…,n 列全加到第 $n+1$ 列上,然后按最后一列展开,得

$$D=\begin{vmatrix} -b_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_n & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$$

$$=(n+1)\begin{vmatrix} -b_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b_2 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n(n+1)b_1b_2\cdots b_n.$$

(3) 利用行列式的性质,可以使计算简化.

例 9 利用行列式的性质解方程

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & x^2-5 & -2 & 6 \\ -3 & 2 & -1 & x^2+1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0.$$

解 我们直接给出计算过程,请读者自行判断计算过程中用了哪些性质.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & x^2-5 & -2 & 6 \\ -3 & 2 & -1 & x^2+1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & x^2-9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2-1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=(x^2-9)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & x^2-1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=(x^2-9)(-1)^{2+3}(x^2-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-5(x^2-9)(x^2-1).$$

由 $5(x^2-9)(x^2-1)=0$ 得,$x_1=3,x_2=-3$ 或 $x_3=1,x_4=-1$.

例 10 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$$

解

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&b-a&c-a&d-a\\0&b^2-ab&c^2-ac&d^2-ad\\0&b^3-ab^2&c^3-ac^2&d^3-ad^2\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}1&1&1\\b&c&d\\b^2&c^2&d^2\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&c-b&d-b\\0&c^2-bc&d^2-bd\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix}1&1\\c&d\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

可以看出，只要 a,b,c,d 四个数中至少有两个相等时，行列式为零.

习题 1-6

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&3&4&\cdots&1\\3&4&5&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&1&2&\cdots&n-1\end{vmatrix}$.

2. 计算下列 n 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix}x&y&0&\cdots&0&0\\0&x&y&\cdots&0&0\\0&0&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&y\\y&0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix}x&-1&0&\cdots&0&0\\0&x&-1&\cdots&0&0\\0&0&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&-1\\a_n&a_{n-1}&a_{n-2}&\cdots&a_2&a_1+x\end{vmatrix}$.

3. 解下列方程：

(1) $\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&2-x^2&2&3\\2&3&1&5\\2&3&1&9-x^2\end{vmatrix}=0$；　(2) $\begin{vmatrix}x&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}&1\\a_1&x&a_2&\cdots&a_{n-1}&1\\a_1&a_2&x&\cdots&a_{n-1}&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&x&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n&1\end{vmatrix}=0$.

1.7 克莱姆法则

我们已经知道对于二元一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2,\end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,其解为:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}.$$

设 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0, D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}$,则有

$$x_j=\frac{D_j}{D},\qquad j=1,2.$$

对于三元一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}$$

设

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时,其解为

$$x_j=\frac{D_j}{D},\qquad j=1,2,3.$$

下面证明含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组的解有与二元、三元线性方程组的解相同的法则,这个法则称为**克莱姆法则**.

设含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n,\end{cases}\tag{1.3}$$

它的系数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$构成的行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为线性方程组(1.3)的**系数行列式**.

定理 1.5(克莱姆法则) 线性方程组(1.3)当其系数行列式 $D\neq 0$ 时,有且仅有唯一解

$$x_j=\frac{D_j}{D}, \qquad j=1,2,\cdots,n, \tag{1.4}$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$是将系数行列式中第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 对应地换为此方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 后得到的行列式.

证 以行列式 D 的第 $j(j=1,2,\cdots,n)$列的代数余子式 $A_{1j},A_{2j},\cdots,A_{nj}$ 分别乘线性方程组(1.3)的第 1 个,第 2 个,…,第 n 个方程,然后相加,得

$$\begin{aligned}&(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+\cdots+a_{n1}A_{nj})x_1+\cdots+(a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj})x_j+\cdots+\\&(a_{1n}A_{1j}+a_{2n}A_{2j}+\cdots+a_{nn}A_{nj})x_n\\=&b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}.\end{aligned}$$

由定理 1.4 可知,x_j 的系数等于 D,$x_s(s\neq j)$的系数等于 0.等号右端等于 D 中第 j 列元素以常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 替换后所得的行列式 D_j,即

$$Dx_j=D_j, \qquad j=1,2,\cdots,n. \tag{1.5}$$

如果线性方程组(1.3)有解,则其解必满足线性方程组(1.5),而当 $D\neq 0$ 时,线性方程组(1.5)只有形式为(1.4)式的解:

$$x_j=\frac{D_j}{D}, \qquad j=1,2,\cdots,n.$$

另一方面,将(1.4)式代入线性方程组(1.3),容易验证它满足线性方程组(1.3),所以(1.4)式是线性方程组(1.3)的解.

综上所述,得到:

当线性方程组(1.3)的系数行列式 $D\neq 0$ 时,有且仅有唯一解:

$$x_j=\frac{D_j}{D}, \qquad j=1,2,\cdots,n.$$

例 1 已知线性方程组

$$\begin{cases} -x_2-x_3+2x_4=1, \\ x_1-x_2+2x_4=0, \\ -x_1+2x_2-x_3=0, \\ 2x_1+x_2+x_3=0, \end{cases}$$

试问方程组是否有唯一解?若有解,求其解.

解 此线性方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=4\neq 0,$$

根据克莱姆法则,此线性方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix}1&-1&-1&2\\0&-1&0&2\\0&2&-1&0\\0&1&1&0\end{vmatrix}=6,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}0&1&-1&2\\1&0&0&2\\-1&0&-1&0\\2&0&1&0\end{vmatrix}=-2,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}0&-1&1&2\\1&-1&0&2\\-1&2&0&0\\2&1&0&0\end{vmatrix}=-10,$$

$$D_4=\begin{vmatrix}0&-1&-1&1\\1&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\2&1&1&0\end{vmatrix}=-4.$$

所以,其解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{3}{2},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{1}{2},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{5}{2},\quad x_4=\frac{D_4}{D}=-1.$$

如果线性方程组(1.3)中的常数 $b_i=0(i=1,2,\cdots,n)$,即

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\quad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0,\end{cases}\tag{1.6}$$

则称线性方程组(1.6)为 n 元**齐次线性方程组**. 而当线性方程组(1.3)中的常数 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$不全为零时,称其为 n 元**非齐次线性方程组**.

由定理1.5可得以下推论.

推论1 若齐次线性方程组(1.6)的系数行列式不为零,则其只有**零解**,即其解为 $x_j=0$ $(j=1,2,\cdots,n)$.

推论2 若齐次线性方程组(1.6)有**非零解**,即解中的 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$不全为零,则其系数行列式 $D=0$.

例2 如果下列齐次线性方程组有非零解,k 应取何值?

$$\begin{cases}kx_1+x_4=0,\\x_1+2x_2-x_4=0,\\(k+2)x_1-x_2+4x_4=0,\\2x_1+x_2+3x_3+kx_4=0.\end{cases}$$

解　此线性方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ k+2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & k \end{vmatrix}$$

$$=-3\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ k+2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=-3(8k-1-k-2k-4)$$

$$=-3(5k-5).$$

如果此线性方程组有非零解，则 $D=0$，即 $k=1$.

习题 1-7

1. 用克莱姆法则解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31, \\ 5x_1+x_2+2x_3=29, \\ 3x_1-x_2+x_3=10; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y-2z=-3, \\ 5x-2y+7z=22, \\ 2x-5y+4z=4; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4, \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6, \\ 8x_1+3x_2-3x_3+4x_4=12, \\ 3x_1+3x_2-2x_3-2x_4=6; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2, \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3, \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3. \end{cases}$

2. 判断线性方程组：

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=0, \\ x_1-x_2+4x_3=0, \\ 5x_1+8x_2-2x_3=0 \end{cases}$$

是否仅有零解.

3. 如果线性方程组有非零解，k 应取什么值？

$$\begin{cases} kx+y-z=0, \\ x+ky-z=0, \\ 2x-y+z=0. \end{cases}$$

总 习 题 1

1. 按定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & x \\ x & x & 3 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2+\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3+\lambda \end{vmatrix}$.

2. 若 $\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}=0$，求 k 的值.

3. 按定义计算行列式：

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & d & c & b \\ c & d & a & b \\ c & b & a & d \end{vmatrix}$；　　(6) $\begin{vmatrix} x+y & z+y & z+x \\ y+z & z+x & x+y \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix}$.

5. 证明：

(1) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix}=0$；

(2) $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = 1+\sum_{i=1}^{4} x_i^2$.

6. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & x \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$，$a_i\neq 0$，$i=1,2,\cdots,n$；

(4) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$，$a_i\neq 0$，$i=1,2,\cdots,n$.

7. 用数学归纳法证明：

$$D_n=\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & & \\ & 1 & \cos\theta & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ & & & & 1 & \cos\theta \end{vmatrix}=\cos n\theta.$$

8. 用克莱姆法则解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

9. 若齐次线性方程组：

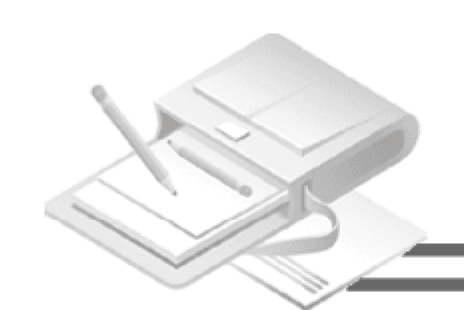
$$\begin{cases} kx + 2y + z = 0, \\ 2x + ky = 0, \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

只有零解，k 应取什么值？

10. 若齐次线性方程组：

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解，试求常数 a 的值.



第 2 章

矩　　阵

矩阵是线性代数中的一个重要概念，它是研究线性关系的一个有力工具，它在自然科学、工程技术，以及某些社会科学中有着广泛的应用. 本章主要介绍矩阵的概念及运算、矩阵的初等变换、逆矩阵及矩阵的秩.

2.1　矩阵的概念

2.1.1　矩阵的定义

设有线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{2.1}$$

如果把未知量的系数按其在线性方程组(2.1)中原有的相对位置排成一个 m 行 n 列的矩形数表，就得到一个 m 行 n 列的矩阵.

定义 2.1　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成一个 m 行 n 列的矩形数表，称为一个 $m\times n$ **矩阵**. 通常用大写黑体字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等表示，记作

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad 或 \quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

其中 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列的元素. 当需要标明矩阵行数 m 与列数 n 时，可表示为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}_{mn}$，简记作 $\boldsymbol{A}$；也可以记作 $(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{mn}$，简记作 (a_{ij}).

若两个矩阵的行数、列数分别相等，则称它们是同型矩阵.

对于仅有一行的矩阵，称为行矩阵，或称为 n 维行向量. 如 $\boldsymbol{A}_{1\times n}=[a_{11}\quad a_{12}\quad \cdots\quad a_{1n}]$.

对于仅有一列的矩阵，称为列矩阵，或称为 m 维列向量. 如 $\boldsymbol{B}_{m\times 1}=\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$.

一行或一列的矩阵有时也用小写黑体字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 等表示.

例如，

$$\boldsymbol{a}=[a_1,a_2,\cdots,a_n];\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}.$$

如果矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的行数与列数都等于 n,称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵或 n 阶矩阵. 记作 $\boldsymbol{A}_n$,即

$$\boldsymbol{A}_n=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}.$$

特别地,规定一阶方阵就是一个数,即 $\boldsymbol{A}=[a_{11}]$.

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为两个 $m\times n$ 矩阵,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mn}\end{bmatrix}.$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等是指 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的对应元素相等,即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij},\qquad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n.$$

值得注意的是,矩阵与行列式在形式上有些类似,但在意义上完全不同. 一个行列式是一个数,而矩阵是一个数表.

2.1.2 几种特殊的矩阵

(1) 对角矩阵

如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$中的元素满足条件

$$a_{ij}=0,\quad i\neq j,\quad i,j=1,2,\cdots,n,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对角矩阵,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&&&\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&a_{nn}\end{bmatrix}.$$

这种记法表示主对角线以外没有注明的元素均为零.

(2) 数量矩阵

如果 n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的元素 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶数量矩阵,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&&&\\&a&&\\&&\ddots&\\&&&a\end{bmatrix}.$$

(3) 零矩阵

若一个矩阵的所有元素均为 0,则称该矩阵为零矩阵,记为 $\boldsymbol{O}$. 如

$$\boldsymbol{O}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{2\times 3},\quad \boldsymbol{O}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}_{3\times 2},$$

均为零矩阵.

由上面的例子可以看出,零矩阵也有阶数,不同阶的零矩阵含义不同.

(4) 单位矩阵

如果 n 阶数量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的元素 $a=1$ 时,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶单位矩阵,记作 $\boldsymbol{I}_n$,简记为 $\boldsymbol{I}$. 即

$$\boldsymbol{I}_n=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}.$$

(5) 三角形矩阵

如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中的元素满足条件

$$a_{ij}=0,\quad i>j,\quad i,j=1,2,\cdots,n,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶**上三角形矩阵**,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&a_{nn}\end{bmatrix}.$$

如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 中的元素满足条件

$$b_{ij}=0,\quad i<j,\quad i,j=1,2,\cdots,n,$$

则称 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶**下三角形矩阵**,即

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11}&&&\\b_{21}&b_{22}&&\\\vdots&&\ddots&\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{bmatrix}.$$

2.1.3 矩阵应用实例

一个矩阵是一张由数据列成的表.由于矩阵可用简明的形式表示数据,因此它的应用很广泛.下面介绍几个具体的应用例子.

例 1 有某种物质从 3 处生产地运往 4 处销售地,调运的里程如下表(单位:km):

里程 \ 生产地	销售地			
	1	2	3	4
1	40	50	70	100
2	50	30	80	90
3	60	40	30	50

这可用如下的三行四列矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} 40 & 50 & 70 & 100 \\ 50 & 30 & 80 & 90 \\ 60 & 40 & 30 & 50 \end{bmatrix}.$$

其中矩阵的元素 a_{ij} 表示从生产地 i 调往销售地 j 的调运里程为 a_{ij} km.

例 2 某厂向三个商店发送四种产品的数量可列成矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix},$$

其中 a_{ij} 为工厂向第 i 店发送第 j 种产品的数量($i=1,2,3;j=1,2,3,4$).

例 3 编号 1,2,3,4 的四个城市之间火车交通情况如图 2.1 所示(图中单箭头表只有单向车,双箭头表有双向车).令

$$a_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{从第 } i \text{ 个城市到第 } j \text{ 个城市有火车交通}, \\ 0, & \text{从第 } i \text{ 个城市到第 } j \text{ 个城市没有火车交通}, \end{cases} \quad i,j=1,2,3,4,$$

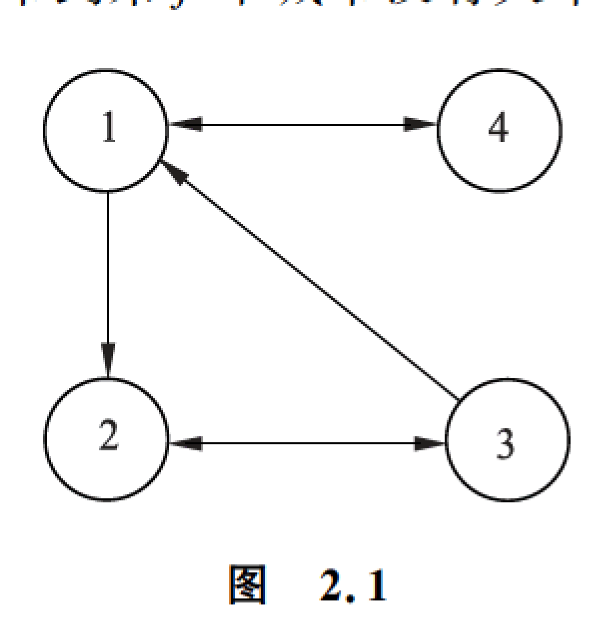


图 2.1

则 1,2,3,4 四个城市的火车交通情况可用矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

习题 2-1

求下列矩阵等式中的 x,y,z 的值：

(1) $\begin{bmatrix} x^2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5x+6 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} x & 2 \\ y & z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y+1 & y \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2.2 矩阵的运算

2.2.1 矩阵的加法

定义 2.2 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和定义为

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix},$$

记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

由矩阵的加法定义可以看出,只有当两个矩阵是同型矩阵时,这两个矩阵才能进行加法运算,两个矩阵的加法等于矩阵中对应元素相加.

例如,若矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1-3 & 2+5 & 4+1 \\ -3+2 & 0+4 & 2+6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 7 & 5 \\ -1 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

矩阵的加法满足如下运算律:设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{O}$ 为 $m\times n$ 矩阵,则:

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$(交换律);

(2) $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$(结合律);

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,记

$$-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n},$$

$-\boldsymbol{A}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**,显然有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}.$$

根据矩阵的加法和负矩阵的概念,可以定义矩阵的减法.

定义 2.3 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差定义为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}),$$

即

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}.$$

例如,设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 4-5 & 2-1 \\ 3-1 & 1-3 \\ 6-0 & 5-5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2.2 数与矩阵的乘法

定义 2.4 以数 k 乘以矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的每一个元素所得到的矩阵，称为 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的积，简称为**数乘**，记作 $k\boldsymbol{A}$，即

$$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

由上面定义的矩阵的加法、数与矩阵的乘法，不难得到下面的运算律：

(1) $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$；

(2) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$，$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

(3) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，$0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

例 1 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{C}=2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$.

解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}&=2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & -6 \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} 8 & -3 & 2 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

例 2 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 7 & 5 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 9 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \end{bmatrix},$$

且 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解 $$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -7 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{7}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

2.2.3 矩阵的乘法

定义 2.5 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$ 的行数相同，则由元素

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},\quad i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n,$$

构成的 m 行 n 列矩阵

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}=\left(\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times n}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的**积**，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，读作 $\boldsymbol{A}$ **左乘** $\boldsymbol{B}$，或 $\boldsymbol{B}$ **右乘** $\boldsymbol{A}$.

对于上述两个矩阵的乘法，可以直观地表示如下：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{is}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}.$$

由上述矩阵乘法定义和图示不难看出：

(1) 矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 的元素 c_{ij} 等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素的乘积之和；

(2) 只有在左矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数和右矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时，才能定义矩阵的乘法 $\boldsymbol{AB}$；

(3) 矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 的行数是左矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数，其列数是右矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数.

例 3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

可见 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

例 4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

从而不能从 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 必然推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

例 5 若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

显见 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

如果两矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相乘，有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是**可交换的**.

例 6 如果

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1&3\\-2&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}-7&1\\1&2\end{bmatrix},$$

那么有

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&3\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&5\\-10&10\end{bmatrix},$$

$$AC=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&5\\-10&10\end{bmatrix},$$

即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，但 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$.

例 7 设 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{I}_3\boldsymbol{A},\boldsymbol{AI}_3$.

解 $$I_3A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=A,$$

$$AI_3=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=A.$$

由此可见，对任意 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，有 $\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AI}_n=\boldsymbol{A}$.

例 8 设

$$A=\begin{bmatrix}a&0&\cdots&0\\0&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a\end{bmatrix}_{n\times n},\quad B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1s}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{ns}\end{bmatrix}_{n\times s}$$

求 $\boldsymbol{AB}$.

解 $$AB=\begin{bmatrix}a&0&\cdots&0\\0&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1s}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{ns}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}ab_{11}&ab_{12}&\cdots&ab_{1s}\\ab_{21}&ab_{22}&\cdots&ab_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ab_{n1}&ab_{n2}&\cdots&ab_{ns}\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1s}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{ns}\end{bmatrix}$$

$$=aB.$$

由此可见，以数量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘或右乘一个矩阵 $\boldsymbol{B}$，其乘积等于以数 a 乘矩阵 $\boldsymbol{B}$.

从上面的例子可以看出，矩阵乘法的运算律与数的乘法的运算律是有区别的. 矩阵乘法不满足交换律和消去律，是矩阵乘法区别于数的乘法的两个重要特点，但矩阵乘法与数的乘法也有相同或相似的运算规律，它满足以下的运算规律：

(1) 结合律：$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(2) 分配律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$，$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$；

(3) $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$，其中 k 为数；

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times k$ 矩阵，$\boldsymbol{I}_m$，$\boldsymbol{I}_k$ 为单位矩阵，则

$$\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_k=\boldsymbol{A}.$$

证 现在证明(2)

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{m\times l}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ik})_{m\times l}$，$\boldsymbol{C}=(c_{kj})_{l\times n}$，则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}&=((a_{ik})_{m\times l}+(b_{ik})_{m\times l})(c_{kj})_{l\times n}\\&=(a_{ik}+b_{ik})_{m\times l}(c_{kj})_{l\times n}\\&=\Big(\sum_{k=1}^{l}a_{ik}c_{kj}\Big)_{m\times n}+\Big(\sum_{k=1}^{l}b_{ik}c_{kj}\Big)_{m\times n}\\&=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}.\end{aligned}$$

同理可证(1)，(3)，(4)成立.

利用矩阵的乘法，可以将线性方程组写成矩阵的形式.

例 9 在线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\qquad\qquad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

中，由于第 i 个方程可以表示为

$$[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=b_i,\quad i=1,2,\cdots,m.$$

因此线性方程组可以表示成

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}.$$

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix},$$

则方程组可以表示为矩阵形式

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}.$$

2.2.4 矩阵的转置

定义 2.6 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

将 $\boldsymbol{A}$ 的行与列互换得到的 $n\times m$ 矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$，即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

转置矩阵有下列的性质：

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(3) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，其中 k 是数；

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

证 我们只证明性质(4)，其他的证明留给读者.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，则 $\boldsymbol{AB}$ 是 $m\times n$ 矩阵，因之 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 是 $n\times m$ 矩阵，而 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 是 $n\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $s\times m$ 矩阵，因此 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也是 $n\times m$ 矩阵，所以矩阵 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的行数与相同的列数.

矩阵 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 第 j 行第 i 列的元素是 $\boldsymbol{AB}$ 第 i 行第 j 列的元素：

$$\sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}.$$

而矩阵 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 第 j 行第 i 列的元素，应为矩阵 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的第 j 行元素与矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 列元素对应相乘的和，即矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列元素与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素对应相乘的和为：

$$\sum_{k=1}^{s} b_{kj}a_{ik}=b_{1j}a_{i1}+b_{2j}a_{i2}+\cdots+b_{sj}a_{is}.$$

于是得到矩阵 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的对应元素均相等. 所以矩阵 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

例 10 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

求 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$.

解 方法 1 因为

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 14 & -3 \\ 17 & 13 & 10 \end{bmatrix},$$

所以

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{bmatrix}.$$

方法 2

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&4&2\\7&2&0\\-1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\0&3\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{bmatrix}.$$

下面介绍几种用转置运算定义的特殊矩阵. 设所讨论的矩阵为方阵.

定义 2.7 如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**.

显然对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素满足

$$a_{ij}=a_{ji},\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

即 n 阶对称矩阵形如

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}.$$

例如,矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&2\\1&2&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&0&-2\\0&-1&3&0\\1&3&1&-4\\-2&0&-4&2\end{bmatrix}$$

均为对称矩阵.

定义 2.8 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**反对称矩阵**.

反对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素满足

$$a_{ij}=-a_{ji},\quad i,j=1,2,\cdots,n,$$
$$a_{ii}=0,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

即 n 阶反对称矩阵形如

$$\begin{bmatrix}0&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\-a_{12}&0&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{1n}&-a_{2n}&\cdots&0\end{bmatrix}.$$

例如,矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&-2\\-1&0&3\\2&-3&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&-2&4\\2&0&0\\-4&0&0\end{bmatrix}$$

均为三阶反对称矩阵.

2.2.5 方阵的幂

定义 2.9 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,k 是正整数,则 k 个 $\boldsymbol{A}$ 的连乘积称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂. 记

作 $\boldsymbol{A}^k$，即

$$\boldsymbol{A}^k=\underbrace{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}}_{k\text{个}}.$$

规定

$$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{I}_n.$$

特别地，对于方阵 $\boldsymbol{A}$，若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\overset{\text{def}}{=\!=}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**幂等阵**. 例如方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

有 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 成立，因此 $\boldsymbol{A}$ 是一个幂等阵.

关于方阵的幂运算，有下列规律.

设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，k,l 为非负整数，则：

(1) $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$；

(2) $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$.

注意，由于矩阵的乘法不满足交换律，因而初等代数中的许多乘幂公式对于方阵一般不能成立. 例如：

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2,$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^k=\underbrace{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\cdots(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})}_{k\text{个}}\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k.$$

例 11 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-2&2&-4\\1&-1&2\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

解 用数学归纳法

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-2&2&-4\\1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&2\\-2&2&-4\\1&-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-5&10\\-10&10&-20\\5&-5&10\end{bmatrix}=5\boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{A}=5\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=5\boldsymbol{A}^2=5^2\boldsymbol{A}.$$

归纳地可得

$$\boldsymbol{A}^n=5^{n-1}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5^{n-1}&-5^{n-1}&2\cdot5^{n-1}\\-2\cdot5^{n-1}&2\cdot5^{n-1}&-4\cdot5^{n-1}\\5^{n-1}&-5^{n-1}&2\cdot5^{n-1}\end{bmatrix}.$$

2.2.6 方阵的行列式

定义 2.10 一个由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，按原来的位置所构成的 n 阶行列式，称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记为 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$.

方阵行列式满足下列运算规则(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，k 为常数，m 是非负整数)：

(1) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$；

(2) $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$；

(3) $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$；

(4) $|\boldsymbol{A}^m|=|\boldsymbol{A}|^m$.

性质(1),(2)很容易证明,性质(3),(4)的证明较繁琐,这里从略.

例 12 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&-1\\3&4\end{bmatrix},$$

求$|AB|$.

解 **方法 1** 因为

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&7\\19&18\end{bmatrix},$$

所以

$$|AB|=\begin{vmatrix}8&7\\19&18\end{vmatrix}=11.$$

方法 2

$$|AB|=|A||B|=\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2&-1\\3&4\end{vmatrix}=11.$$

关于方阵行列式的性质(3)还可以推广到有限个 n 阶方阵连乘的情形,即

$$|A_1A_2\cdots A_n|=|A_1||A_2|\cdots|A_n|.$$

习题 2-2

1. 计算:

(1) $\begin{bmatrix}1&6&4\\-4&2&8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&0&1\\2&-3&4\end{bmatrix}$;　　(2) $\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&-2\\0&3\end{bmatrix}$;

(3) $2\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+8\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$.

2. 计算:

(1) $\begin{bmatrix}3&-2\\5&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\2&5\end{bmatrix}$;　　(2) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-2&-4\\-1&-2&-4\\1&2&4\end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix}1&2&3\\-2&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\\3&0&-1\end{bmatrix}$;　　(4) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}$;

(5) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&-1\\1&4&2\\3&-2&4\end{bmatrix}$;　　(6) $\begin{bmatrix}3&1&2&-1\\0&3&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&5\\0&2&0\\1&0&1\\0&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\1&5\\0&2\end{bmatrix}$.

3. 计算下列矩阵(其中 n 为正整数):

(1) $\begin{bmatrix}1&-2\\3&4\end{bmatrix}^3$;　　(2) $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^2$;

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^n$;　　(4) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^n$.

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称矩阵，证明 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

2.3 逆矩阵

2.3.1 逆矩阵的概念

定义 2.11 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，若存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}, \tag{2.2}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记作 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

如果不存在满足(2.2)式的矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是不可逆的.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足什么条件时可逆？如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，逆矩阵是否唯一，如何求出 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵？可逆的矩阵有什么性质？这是本节要讨论的问题.

2.3.2 矩阵可逆的充要条件

定理 2.1 如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，则其逆矩阵是唯一的.

证 设 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，即

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{I},$$

则

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BI}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC})=(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{IC}=\boldsymbol{C}.$$

为讨论矩阵可逆的充要条件，先引入伴随矩阵的概念.

定义 2.12 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶矩阵，A_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式 $(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}^*$.

由伴随矩阵的定义，不难验证

$$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}. \tag{2.3}$$

由此，可得下面的定理.

定理 2.2 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为可逆的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，且当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*.$$

证 (必要性)设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则

$$\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I},$$

两边取行列式，得

$$|\boldsymbol{AA}^{-1}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}|=1,$$

所以$|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

(充分性)若$|\boldsymbol{A}|\neq 0$,则由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$,可得

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right)=\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I},$$

由逆矩阵的定义可知,矩阵$\boldsymbol{A}$可逆,且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*.$$

若n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式不为零,即$|\boldsymbol{A}|\neq 0$,则称$\boldsymbol{A}$为**非奇异矩阵**,否则称$\boldsymbol{A}$为**奇异矩阵**.

定理2.2不仅给出了一个矩阵可逆的条件,同时,也给出了求逆矩阵的一种方法,我们称之为**伴随矩阵法**.

例1 求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$的逆矩阵.

解 因为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-2&-5\\0&-2&-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-2&-5\\0&0&-1\end{vmatrix}=2\neq 0,$$

所以$\boldsymbol{A}$可逆.

又因为

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}2&2\\3&4\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2&3\\4&3\end{vmatrix}=6,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&3\\3&3\end{vmatrix}=-6,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2&3\\2&1\end{vmatrix}=-4,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}=5,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\2&2\end{vmatrix}=-2.$$

所以

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{bmatrix}.$$

于是得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{bmatrix}.$$

通常,伴随矩阵法只用于求阶数较低的或较特殊的矩阵的逆矩阵.对于阶数较高的矩阵,通常用初等变换求逆矩阵(见2.5节).

推论 若$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵,且存在n阶矩阵$\boldsymbol{B}$,使$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$或$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$,则$\boldsymbol{A}$可逆,且$\boldsymbol{B}$为$\boldsymbol{A}$的逆矩阵.

证 设有$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$,则有

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{I}=1.$$

所以$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，于是 $\boldsymbol{A}$ 可逆，设其逆矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，则有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{IB}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}^{-1}.$$

同理可证，若有 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

这一结论说明，如果我们要验证矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，只要验证等式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$ 中的一个即可，不必再按定义同时验证两个等式.

2.3.3 逆矩阵的性质

可逆矩阵具有以下性质：

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，数 $k\neq 0$，则 $k\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(3) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵且均可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$；

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

证 仅证性质(3)，因为

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{IB}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I},$$

所以 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

性质(3)可推广到 k 个可逆矩阵乘积的情形：

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k)^{-1}=\boldsymbol{A}_k^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}.$$

另外，当$|\boldsymbol{A}\neq 0$ 时，还规定 $\boldsymbol{A}^{-k}=(\boldsymbol{A}^{-1})^k$，其中 k 为正整数.

例 2 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$，且

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{B}$.

解 由 $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$，得 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$. 因

$$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

故 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 可逆，且

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{bmatrix},$$

于是得

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{bmatrix}.$$

例 3 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=1, \\ 2x_1+2x_2+\ \ x_3=0, \\ 3x_1+4x_2+3x_3=2. \end{cases}$$

解 将此线性方程组的系数,未知变量及右端常数项分别记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

则原方程组对应的矩阵方程为

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}.$$

由 $|\boldsymbol{A}|=14\neq 0$ 知,方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆,且由

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix} 2 & 18 & -8 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & -10 & 6 \end{bmatrix},$$

得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 2 & 18 & -8 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & -10 & 6 \end{bmatrix}.$$

所以,求得矩阵方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的未知变量矩阵

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{b}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 2 & 18 & -8 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & -10 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix} -14 \\ 7 \\ 14 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ \dfrac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

即得此线性方程组的解为

$$x_1=-1,\quad x_2=\frac{1}{2},\quad x_3=1.$$

习题 2-3

1. 判断下列矩阵是否可逆,如可逆,求其逆矩阵:

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $(ad-bc\neq 0)$;

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

(5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(6) $\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$ $(a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n)$.

2. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^*$ 与 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$，$(\boldsymbol{A}^*)^*$.

2.4 分块矩阵

下面介绍矩阵运算的一种有用的技巧——矩阵的分块. 这种技巧在处理某些较高阶的矩阵时常常被用到.

2.4.1 矩阵的分块

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 4×3 矩阵，用一些纵线和横线可以把它分成 4 块：

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{c:cc}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43}\end{array}\right].$$

如果记

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{21}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{12}=\begin{bmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{21}=\begin{bmatrix}a_{31}\\ a_{41}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{22}=\begin{bmatrix}a_{32} & a_{33}\\ a_{42} & a_{43}\end{bmatrix},$$

就可以把 $\boldsymbol{A}$ 看成由上面四个小矩阵所组成的，记作

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix},$$

并称它是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 2×2 分块矩阵，其中的每一个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个**子块**(**子矩阵**).

定义 2.13 把一个矩阵的元素分成若干块(称为子块或子矩阵)，并以子块作为元素的矩阵称为**分块矩阵**.

给了一个矩阵，可以根据需要把它写成不同的分块矩阵. 常用的分块矩阵，除了上面的 2×2 分块矩阵，还有以下几种形式：

(1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，按行分块

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{bmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}],\qquad i=1,2,\cdots,m.$$

(2) 按列分块

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n],$$

其中

$$\boldsymbol{\beta}_j=[a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}]^{\mathrm{T}},\qquad j=1,2,\cdots,n.$$

(3) **对角块矩阵.** 当 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中非零元素都集中在主对角线附近，有时可将 $\boldsymbol{A}$ 分块成下面的对角块矩阵(又称**准对角矩阵**).

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{bmatrix}\xlongequal{\text{def}}\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s),$$

其中 $\boldsymbol{A}_i$ 是 r_i 阶方阵 $\left(\sum_{i=1}^{s}r_i=n\right)$.

例如

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc:ccc:c}1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 5 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & \\ & & \boldsymbol{A}_3\end{bmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 5 & 8\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=[9].$$

(4) 准下三角形分块

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & & & \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{ss}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ii}$ 是 r_i 阶方阵 $\left(\sum_{i=1}^{s}r_i=n\right)$.

准上三角形分块的定义类似.

2.4.2 分块矩阵的运算

(1) 分块矩阵的加法

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵，用相同分法把 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 分块为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{r1} & \boldsymbol{A}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1s}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{r1} & \boldsymbol{B}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{rs}\end{bmatrix},$$

其中每一个 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}(i=1,2,\cdots,r,j=1,2,\cdots,s)$是同型子块矩阵，则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s}+\boldsymbol{B}_{1s}\\ \boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2s}+\boldsymbol{B}_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{r1}+\boldsymbol{B}_{r1} & \boldsymbol{A}_{r2}+\boldsymbol{B}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs}+\boldsymbol{B}_{rs}\end{bmatrix}.$$

这里我们把每个小块看作新矩阵的元素进行运算.

(2) 分块矩阵的数量乘法

设 k 为数

$$k\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}k\boldsymbol{A}_{11} & k\boldsymbol{A}_{12} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{1s}\\ k\boldsymbol{A}_{21} & k\boldsymbol{A}_{22} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ k\boldsymbol{A}_{r1} & k\boldsymbol{A}_{r2} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{rs}\end{bmatrix}.$$

(3) 分块矩阵的转置

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{r1}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{r2}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1s}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{2s}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},$$

即转置一个分块矩阵时，在分块矩阵中除了作行、列位置互换外，还要对每一个子矩阵做转置. 例如，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:cc:c}1 & 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 4 & 5 & 2\\ \hdashline 1 & 5 & 2 & 3 & 4\end{array}\right],$$

则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_{13}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{23}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 5\\ \hdashline 2 & 4 & 2\\ 1 & 5 & 3\\ \hdashline 1 & 2 & 4\end{array}\right].$$

(4) 分块矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times k$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $k\times n$ 矩阵，对 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 作分块，使得 $\boldsymbol{A}$ 的列的分法与 $\boldsymbol{B}$ 的行的分法一致，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{matrix} & k_1 & k_2 & & k_s & \\ & \left[\begin{matrix}\boldsymbol{A}_{11}\\ \boldsymbol{A}_{21}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{r1}\end{matrix}\right. & \begin{matrix}\boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{22}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{r2}\end{matrix} & \begin{matrix}\cdots\\ \cdots\\ \\ \cdots\end{matrix} & \left.\begin{matrix}\boldsymbol{A}_{1s}\\ \boldsymbol{A}_{2s}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{rs}\end{matrix}\right] & \begin{matrix}m_1\\ m_2\\ \\ m_r\end{matrix}\end{matrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{matrix} & n_1 & n_2 & & n_p & \\ & \left[\begin{matrix}\boldsymbol{B}_{11}\\ \boldsymbol{B}_{21}\\ \vdots\\ \boldsymbol{B}_{s1}\end{matrix}\right. & \begin{matrix}\boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{B}_{22}\\ \vdots\\ \boldsymbol{B}_{s2}\end{matrix} & \begin{matrix}\cdots\\ \cdots\\ \\ \cdots\end{matrix} & \left.\begin{matrix}\boldsymbol{B}_{1p}\\ \boldsymbol{B}_{2p}\\ \vdots\\ \boldsymbol{B}_{sp}\end{matrix}\right] & \begin{matrix}k_1\\ k_2\\ \\ k_s\end{matrix}\end{matrix},$$

其中子块 $\boldsymbol{A}_{it}$ 为 $m_i\times k_t$ 矩阵，$\boldsymbol{B}_{tj}$ 为 $k_t\times n_j$ 矩阵，且 $\sum\limits_{i=1}^{r}m_i=m,\sum\limits_{t=1}^{s}k_t=k,\sum\limits_{j=1}^{p}n_j=n$. 则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1p}\\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22} & \cdots & \boldsymbol{C}_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{r1} & \boldsymbol{C}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{C}_{rp}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{C}_{ij}=\sum\limits_{t=1}^{s}\boldsymbol{A}_{it}\boldsymbol{B}_{tj}$ 是 $m_i\times n_j$ 子矩阵. 这与普通矩阵乘法规则在形式上是相同的.

例 1 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 6 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

计算 $k\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{AB}$.

解 将矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分块如下：

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ \hdashline 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 6 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{F} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}.$$

则

$$k\boldsymbol{A}=k\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\boldsymbol{I} & k\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & -k\boldsymbol{I}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{F} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{F} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{F} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}+\boldsymbol{CF} & \boldsymbol{C}\\ -\boldsymbol{F} & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}.$$

然后再分别计算 $k\boldsymbol{I},k\boldsymbol{C},\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D},\boldsymbol{D}+\boldsymbol{CF}$ 代入上面三式，得

$$k\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}k & 0 & k & 3k\\ 0 & k & 2k & 4k\\ 0 & 0 & -k & 0\\ 0 & 0 & 0 & -k\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 2 & 4\\ 6 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}7 & -1 & 1 & 3\\ 14 & -2 & 2 & 4\\ -6 & -3 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

容易验证这个结果与直接用不分块矩阵运算得到的结果相同.

(5) 分块矩阵的行列式

具有某些特殊结构的分块矩阵，其行列式的计算有十分简单的结果.

例如，设分块矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是 s,t 阶方阵，$\boldsymbol{C}$ 是 $s\times t$ 矩阵，$\boldsymbol{O}$ 是 $t\times s$ 零矩阵，我们可以证明

$$|\boldsymbol{P}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|.$$

同理，准对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式有如下计算公式：

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_s|.$$

因此，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 的充要条件是每一个 $|\boldsymbol{A}_i|\neq 0$，从而推得：分块对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是每一个子矩阵 $\boldsymbol{A}_i$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s^{-1}\end{bmatrix}.$$

例 2 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix},$$

用矩阵分块的方法求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解 可将 $\boldsymbol{A}$ 如下分块：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1}\end{bmatrix}.$$

又

$$\boldsymbol{A}_1^{-1}=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8}\\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}5 & -2 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8}\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

例 3 设$A=\begin{bmatrix} A_1 & O \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$为 n 阶方阵，A_1 为 r 阶方子阵，若 A 可逆，求 A^{-1}.

解 因 A 可逆，所以$|A|=|A_1||A_4|\neq 0$，则$|A_1|\neq 0$，$|A_4|\neq 0$，因而 A_1，A_4 有逆矩阵 A_1^{-1}，A_4^{-1}. 设 A 的逆矩阵为 X，并按如下分块：

$$X=\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix},$$

其中 X_1 是 r 阶方阵，X_4 是 $n-r$ 阶方阵，由 $AX=I$ 有

$$\begin{aligned} AX &= \begin{bmatrix} A_1 & O \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1X_1 & A_1X_2 \\ A_3X_1+A_4X_3 & A_3X_2+A_4X_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & I_{n-r} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

这里 I_r，I_{n-r}为单位矩阵. 比较上式最后两个分块矩阵，得矩阵方程组：

$$\begin{cases} A_1X_1=I_r, \\ A_1X_2=O, \\ A_3X_1+A_4X_3=O, \\ A_3X_2+A_4X_4=I_{n-r}. \end{cases}$$

因为 A_1 可逆，故从上面第一式得 $X_1=A_1^{-1}$. 由第二式得 $X_2=O$. 由第三式得 $A_4X_3=-A_3X_1$，两边左乘 A_4^{-1}，得

$$X_3=-A_4^{-1}A_3X_1=-A_4^{-1}A_3A_1^{-1}.$$

由第四式 $A_4X_4=I_{n-r}$得 $X_4=A_4^{-1}$，故 A 的逆为

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & O \\ -A_4^{-1}A_3A_1^{-1} & A_4^{-1} \end{bmatrix}.$$

习题 2-4

1. 按下列分块的方法求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$； (2) $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

2. 按指定分块的方法，用分块矩阵乘法求下列矩阵的乘积：

(1) $\left[\begin{array}{cc:c} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ \hdashline 0 & 3 & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \hdashline 0 & -1 \end{array}\right]$； (2) $\left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ \hdashline 3 & 0 & -2 \\ \hdashline 1 & -1 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c:c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$；

(3) $\left[\begin{array}{cc:cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c \\ \hdashline 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right]$.

3. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及 m 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都可逆，求$\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}^{-1}$.

2.5 矩阵的初等变换

矩阵的初等变换是处理矩阵问题的一种基础方法，它在化简矩阵、解线性方程组、求矩阵的逆和求矩阵的秩等诸多领域中发挥着重要的作用.

2.5.1 初等变换

定义 2.14 对矩阵进行以下三种变换，称为矩阵的**初等行(列)变换**：

(1) 交换矩阵的两行(列)，如交换第 i,j 行(列)的位置，记为 $r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$；

(2) 用一个非零的数 k 乘矩阵的某一行(列)，如用 k 乘第 i 行(列)，记为 $kr_i (kc_i)$；

(3) 将矩阵的某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)上，如把第 j 行(列)的 k 倍加到第 i 行(列)上，记为 $r_i + kr_j (c_i + kc_j)$.

矩阵的初等行变换与矩阵的初等列变换统称为矩阵的**初等变换**.

定义 2.15 一个矩阵称为**行阶梯形矩阵**(常简称为**阶梯形矩阵**)，如果从第 1 行起，此矩阵的每行第一个非零元素前面零的个数逐行增加，一旦出现零行，则后面各行(若还有的话)都是零行.

例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

都是阶梯形矩阵.

定理 2.3 任何一个非零矩阵都可以经过有限次的初等行变换化为阶梯形矩阵.

证 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

(1) 当 $\boldsymbol{A}$ 中的第 1 列元素 $a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}$ 不全为零时，不妨设 $a_{11} \neq 0$(否则，可对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换，调换 $\boldsymbol{A}$ 中行的位置，使 a_{11} 位置上的元素不为零)，把第 1 行各元素的 $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ 倍，分别加到第 i 行($i=2,3,\cdots,m$)的对应元素上，这样，可将 $\boldsymbol{A}$ 中的第 1 列元素除 a_{11} 外的其他元素全部变为零，得到矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

然后，对 $\boldsymbol{B}$ 中右下角的矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

重复上述过程，经过有限次同样的初等行变换，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可化为阶梯形矩阵.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 中第 1 列元素全为零，按顺序考虑第 2 列，第 3 列，……，一直到第 n 列，由于 $\boldsymbol{A}$ 不是零矩阵，所以至少在某一列中，某个 $a_{ij}\neq 0$(前 $j-1$ 列全为零). 将此不为零的 a_{ij} 通过初等行变换，换到第 1 行，重复(1)的过程，即可证明在上述情形下，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可化为阶梯形矩阵.

上述对定理的证明过程，实际上就是把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵的过程.

例 1 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix},$$

用初等行变换化矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为行阶梯形矩阵.

解 我们用记号"→"表示对 $\boldsymbol{A}$ 做初等变换，施行初等行变换写在"→"的上方，施行初等列变换写在"→"的下方.

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+(-2)r_1}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+(-1)r_2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}(\text{行阶梯形}).$$

定义 2.16 一个行阶梯形矩阵若满足：

(1) 每个非零行的第一个非零元素(首个非零元)为 1；

(2) 每个首个非零元素所在列的其他元素全为零，

则称它为**行标准形矩阵**(也称为**简化阶梯形矩阵**).

例如

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

都是简化的阶梯形矩阵.

定义 2.17 如果一个非零矩阵的左上角为单位矩阵，其他位置的元素都为零，则称这个矩阵为**标准形矩阵**.

用分块矩阵的表示方法，形如

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}_{r\times(n-r)} \\ \boldsymbol{O}_{(m-r)\times r} & \boldsymbol{O}_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix},\quad [\boldsymbol{I}_m \quad \boldsymbol{O}_{m\times p}],\quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{O}_{s\times n} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{I}_n$$

的矩阵都是标准形矩阵.

定理 2.4 任何矩阵都可以经过有限次初等行变换化为简化阶梯形矩阵. 任何矩阵都可以经过有限次的初等变换化为标准形矩阵.

例 2 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&2&-1&4\\0&2&4&3&5\\0&-1&-2&6&-7\end{bmatrix},$$

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为简化阶梯形矩阵与标准形矩阵.

解 先用初等行变换将矩阵化为简化阶梯形矩阵,再用初等变换化为标准形矩阵.

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+(-2)r_1}\begin{bmatrix}0&1&2&-1&4\\0&0&0&5&-3\\0&0&0&5&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+(-1)r_2}\begin{bmatrix}0&1&2&-1&4\\0&0&0&5&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}r_2}\begin{bmatrix}0&1&2&-1&4\\0&0&0&1&-\frac{3}{5}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{bmatrix}0&1&2&0&\frac{17}{5}\\0&0&0&1&-\frac{3}{5}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\text{(简化阶梯形)}$$

$$\xrightarrow[c_1\leftrightarrow c_2]{}\begin{bmatrix}1&0&2&0&\frac{17}{5}\\0&0&0&1&-\frac{3}{5}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[c_2\leftrightarrow c_4]{}\begin{bmatrix}1&0&2&0&\frac{17}{5}\\0&1&0&0&-\frac{3}{5}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3+(-2)c_1\\c_5+\left(-\frac{17}{5}\right)c_1\\c_5+\frac{3}{5}c_2}]{}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\text{(标准形)}.$$

例 3 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&1&0\\0&1&2&-4&1\\2&-2&-4&6&-1\\3&-3&-5&7&-1\end{bmatrix}.$$

(1) 用初等行变换把 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形,进一步化为简化阶梯形;

(2) 再用初等列变换将其化为标准形.

解

$$(1)\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&1&0\\0&1&2&-4&1\\2&-2&-4&6&-1\\3&-3&-5&7&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4+(-3)r_1]{r_1+(-2)r_1}\begin{bmatrix}1&-1&-1&1&0\\0&1&2&-4&1\\0&0&-2&4&-1\\0&0&-2&4&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+(-1)r_3]{r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&-1&-1&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&-2&4&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\text{(阶梯形)}$$

$$\xrightarrow{\left(-\frac{1}{2}\right)r_3}\begin{bmatrix}1&-1&-1&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&-2&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1+r_3]{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&-1&\frac{1}{2}\\0&1&0&0&0\\0&0&1&-2&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}\text{(简化阶梯形)}.$$

(2) $$\boldsymbol{B}\xrightarrow[\substack{c_4+c_1\\c_4+2c_3\\c_5+\left(-\frac{1}{2}\right)c_3\\c_5+\left(-\frac{1}{2}\right)c_1}]{}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\text{(标准形)}.$$

2.5.2 初等矩阵

定义 2.18 对单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 施行一次初等变换得到的矩阵,称为**初等矩阵**.

(1) 交换单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 行(列)与第 j 行(列),得到的矩阵记为 $\boldsymbol{I}(i,j)$,即

$$\boldsymbol{I}(i,j)=\begin{bmatrix}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&0&\cdots&1&&&\\&&&\vdots&&\vdots&&&\\&&&1&\cdots&0&&&\\&&&&&&1&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\\\\i\text{ 行}\\\\j\text{ 行}\\\\\\\\\end{matrix};$$

i 列　　j 列

(2) 用一个非零数 k 乘单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 行(列),得到的矩阵记为 $\boldsymbol{I}(i(k))$,即

$$\boldsymbol{I}(i(k))=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} i\text{ 行}.$$

$$\qquad\qquad i\text{ 列}$$

(3) 将单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 j 行(列)的 k 倍加到第 i 行(列)上,得到的矩阵记为 $\boldsymbol{I}(i,j(k))$,即

$$\boldsymbol{I}(i,j(k))=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \end{matrix}.$$

$$\qquad i\text{ 列} \quad j\text{ 列}$$

由行列式的性质,立即知道上面矩阵的行列式皆不为零,因此初等矩阵是可逆矩阵,其逆矩阵也是初等矩阵.

定理 2.5 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$.

(1) 对 $\boldsymbol{A}$ 施行某种初等行变换,等于用同种的 m 阶初等矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$.

(2) 对 $\boldsymbol{A}$ 施行某种初等列变换,等于用同种的 n 阶初等矩阵右乘 $\boldsymbol{A}$.

证 我们只证初等行变换的情形,列变换可以类似地证明.设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$是任意一个 m 阶方阵,将 $\boldsymbol{A}$ 按行分块:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_m \end{bmatrix},$$

于是

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix} b_{11}\boldsymbol{A}_1+b_{12}\boldsymbol{A}_2+\cdots+b_{1m}\boldsymbol{A}_m \\ b_{21}\boldsymbol{A}_1+b_{22}\boldsymbol{A}_2+\cdots+b_{2m}\boldsymbol{A}_m \\ \vdots \\ b_{m1}\boldsymbol{A}_1+b_{m2}\boldsymbol{A}_2+\cdots+b_{mm}\boldsymbol{A}_m \end{bmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{B}$ 的任意性,令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}(i,j)$,便有

$$\boldsymbol{I}(i,j)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_m\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ i\text{ 行}\\ \\ j\text{ 行}\\ \\ \\ \end{matrix},$$

这说明对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次 i,j 两行的对换，其结果恰等于 $\boldsymbol{I}(i,j)\boldsymbol{A}$.

又令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}(i(k))$，则有

$$\boldsymbol{I}(i(k))\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \vdots\\ k\boldsymbol{A}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_m\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ i\text{ 行}\\ \\ \\ \end{matrix},$$

这说明用一个非零的数 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行，其结果恰等于 $\boldsymbol{I}(i(k))\boldsymbol{A}$.

再令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}(i,j(k))$，同样有

$$\boldsymbol{I}(i,j(k))\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_i+k\boldsymbol{A}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_m\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ i\text{ 行}\\ \\ j\text{ 行}\\ \\ \\ \end{matrix},$$

这说明把 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行，其结果恰等于 $\boldsymbol{I}(i,j(k))\boldsymbol{A}$.

例 4 用三阶方阵来验证上述定理 2.5 的结果.

解 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},$$

(1) 交换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行和第 3 行：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{bmatrix},$$

而

$$\boldsymbol{I}(1,3)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{bmatrix}.$$

(2) 以非零的数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 3 行：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{kr_3} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{bmatrix},$$

而

$$\boldsymbol{I}(3(k))\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{bmatrix}.$$

(3) 将第 2 行的 k 倍加到第 1 行上：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+kr_2} \begin{bmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

而

$$\boldsymbol{I}(1,2(k))\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

2.5.3 矩阵的等价

定义 2.19 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行(列)变换可化为矩阵 $\boldsymbol{B}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行(列)等价.若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等变换可化为矩阵 $\boldsymbol{B}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 等价,记为 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$.

矩阵的等价具有以下性质：

(1) 反身性：$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}$；

(2) 对称性：若 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{A}$；

(3) 传递性：若 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{C}$.

由于任何矩阵都可以经过有限次的初等行变换化为阶梯形矩阵,所以,任何一个矩阵与其阶梯形矩阵等价.

定理 2.6 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 等价当且仅当存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.特别地,任一矩阵与其标准形矩阵等价.

定理 2.7 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为可逆的充分必要条件是它可以表示成有限个初等矩阵的乘积.

证 (必要性)由定理 2.4,我们知道矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 经过有限次的初等变换,可以化为下面形式的标准形矩阵

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}_{r\times(n-r)} \\ \boldsymbol{O}_{(m-r)\times r} & \boldsymbol{O}_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}.$$

再由定理 2.5 知,存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$ 及 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$,使

$$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{D}.$$

因 $\boldsymbol{A}$ 可逆,且初等矩阵可逆,所以 $\boldsymbol{D}$ 可逆,则 $|\boldsymbol{D}|\neq\boldsymbol{0}$,于是 $\boldsymbol{D}$ 不能有任一行(列)的元素全为零,因此 $\boldsymbol{D}$ 必等于 $\boldsymbol{I}_n$,即

$$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{I}_n.$$

于是

$$A=P_1^{-1}\cdots P_s^{-1}IQ_t^{-1}\cdots Q_1^{-1}.$$

即 A 可以表示成一些初等矩阵的乘积.

因初等矩阵可逆,所以充分条件是显然的.

下面介绍一种求逆矩阵的方法——**初等变换求逆法.**

如果 A 可逆,则 A^{-1} 也可逆,根据上面定理,存在初等矩阵 $G_1,G_2,\cdots,G_k$,使

$$A^{-1}=G_1G_2\cdots G_k,$$

那么有

$$A^{-1}A=G_1G_2\cdots G_kA,$$

即

$$I=G_1G_2\cdots G_kA, \quad ①$$

$$A^{-1}=G_1G_2\cdots G_kI. \quad ②$$

①式表示对 A 的行施以若干次初等变换化为 I,②式表示对 I 的行施以同样的初等变换化为 A^{-1}. 于是可以得出一个求逆矩阵的方法如下:

作一个 $n\times 2n$ 的矩阵 $[A \mid I]$,然后对此矩阵施以仅限于行的初等变换,使子块 A 化为 I,则同时子块 I 即化为 A^{-1} 了.

例 5 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

解 $[A \mid I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&2&-1&1&0&0\\1&1&2&0&1&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right]$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&0&1&0\\0&2&-1&1&0&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3+r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&0&1&0\\0&2&-1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1+\left(-\frac{1}{2}\right)r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}&1&0\\0&2&-1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1+\left(-\frac{5}{2}\right)r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}\\0&2&-1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}\\0&2&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]=[\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{A}^{-1}],$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

如果不知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆，也可按上述方法去作，只要 $n\times 2n$ 矩阵左边子块有一行(列)的元素全为零，则 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

例 6 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -5\end{bmatrix}$，求 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$.

解 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -5\end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ -2 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 6\end{bmatrix}$，

$$[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}-2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}-2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\left(-\frac{1}{2}\right)r_1,(-1)r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 3 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2+(-3)r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -2 & 6 & 0 & \frac{3}{2} & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\left(-\frac{1}{2}\right)r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&-\frac{1}{2}&0\\0&1&-3&0&-\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-1&0&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2+3r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&-\frac{1}{2}&0\\0&1&0&-3&-\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-1&0&0\end{array}\right].$$

于是得到

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&0\\-3&-\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}\\-1&0&0\end{bmatrix}.$$

上面用初等变换求逆矩阵的方法,仅限于对矩阵的行施以初等变换,即初等行变换,不得出现初等列变换.

习题 2-5

1. 用初等变换将下列矩阵化为标准形矩阵:

(1) $\begin{bmatrix}1&-1\\3&2\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}0&-1\\3&2\end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&2&1\\1&-2&0\end{bmatrix}$; (4) $\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&-3&1\\-2&2&-4\end{bmatrix}$;

(5) $\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&-3&1\end{bmatrix}$; (6) $\begin{bmatrix}1&3\\-1&-3\\2&1\end{bmatrix}$.

2. 用初等变换判定下列矩阵是否可逆,如可逆,求其逆矩阵:

(1) $\begin{bmatrix}2&2&-1\\1&-2&4\\5&8&2\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}(ad-bc\neq0)$;

(3) $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&2\\1&1&1&-1\\1&0&-2&-6\end{bmatrix}$; (4) $\begin{bmatrix}1&3&-5&7\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

2.6 矩阵的秩

定义 2.20 在一个 m 行 n 列的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中任取 k 行 k 列($k\leqslant\min\{m,n\}$),位于这些行和列的相交处的元素,保持它们原来的相对位置所构成的 k 阶行列式,称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 阶

子式.

例如,对于

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&1\\3&2&-3&2\\0&4&1&5\end{bmatrix},$$

矩阵 A 的第 1,2,3 行和第 1,2,4 列相交处的元素所构成的三阶子式为

$$\begin{vmatrix}1&2&1\\3&2&2\\0&4&5\end{vmatrix}.$$

定义 2.21 设 A 为 $m\times n$ 矩阵.如果 A 中不为零的子式最高阶数为 r,即存在 r 阶子式不为零,而任何 $r+1$ 阶子式皆为零,则称 r 为矩阵 A 的**秩**,记为秩$(A)=r$ 或 $\mathrm{r}(A)=r$.当 $A=O$ 时,规定 $\mathrm{r}(A)=0$.

显然 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})$.

很明显,$0\leqslant \mathrm{r}(A)\leqslant \min\{m,n\}$.

当 $\mathrm{r}(A)=\min\{m,n\}$时,称矩阵 A 为**满秩**矩阵.

例 1 求下列矩阵的秩:

(1) $A=\begin{bmatrix}1&2&1&3&4\\0&2&5&1&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$; (2) $B=\begin{bmatrix}1&3&-9&3\\1&4&-12&7\\-1&0&0&9\end{bmatrix}$.

解 (1) A 是一个行阶梯形矩阵,容易看出 A 的所有 4 阶子式均为零,A 有一个三阶子式

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&1\\0&0&1\end{vmatrix}=2\neq0,$$

故 $\mathrm{r}(A)=3$.

(2) B 的最大阶子式为三阶,共有 4 个:

$$\begin{vmatrix}1&3&-9\\1&4&-12\\-1&0&0\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1&3&3\\1&4&7\\-1&0&9\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix}1&-9&3\\1&-12&7\\-1&0&9\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}3&-9&3\\4&-12&7\\0&0&9\end{vmatrix}=0.$$

B 的所有三阶子式皆为零,且 B 有一个二阶子式

$$\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}=1\neq0,$$

故 $\mathrm{r}(B)=2$.

用定义求行数、列数都很大的矩阵的秩是不方便的，下面介绍用初等变换求矩阵的秩.

定理 2.8 矩阵经初等变换后，其秩不变.

证 仅考察一次初等变换的情形.

设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 经初等变换变为 $\boldsymbol{B}_{m\times n}$，且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r_1$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=r_2$.

当对 $\boldsymbol{A}$ 施以互换两行或以某非零数乘某一行的变换时，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中任何 r_1+1 阶子式等于某一非零数 c 与 $\boldsymbol{A}$ 的某个 r_1+1 阶子式的乘积，其中 $c=\pm1$ 或其他非零数. 因为 $\boldsymbol{A}$ 的任何 r_1+1 阶子式皆为零，因此 $\boldsymbol{B}$ 的任何 r_1+1 阶子式也都为零.

当对 $\boldsymbol{A}$ 施以第 i 行乘 k 后加于第 j 行的变换时，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的任意一个 r_1+1 阶子式 $|\boldsymbol{B}_1|$，如果它不含 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 行或既含 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 行又含第 j 行，则它即等于 $\boldsymbol{A}$ 的一个 r_1+1 阶子式；如果 $|\boldsymbol{B}_1|$ 含 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 行但不含第 i 行时，则 $|\boldsymbol{B}_1|=|\boldsymbol{A}_1|\pm k|\boldsymbol{A}_2|$，其中 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中的两个 r_1+1 阶子式. 由 $\boldsymbol{A}$ 的任何 r_1+1 阶子式均为零，可知 $\boldsymbol{B}$ 的每一个 r_1+1 阶子式也全为零.

由以上分析可知，对 $\boldsymbol{A}$ 施以一次初等行变换后得 $\boldsymbol{B}$ 时，有 $r_2<r_1+1$ 即 $r_2\leqslant r_1$.

$\boldsymbol{A}$ 经某种初等变换得 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}$ 也可以经相应的初等变换得 $\boldsymbol{A}$，因此又有 $r_1\leqslant r_2$.

故得 $r_1=r_2$.

显然上述结论对初等列变换也成立.

故对 $\boldsymbol{A}$ 每施以一次初等变换所得矩阵的秩与 $\boldsymbol{A}$ 的秩相同，因而对 $\boldsymbol{A}$ 施以有限次初等变换后所得矩阵的秩仍然等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

例 2 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&2&1&0\\7&1&14&7&1\\0&5&1&4&6\\2&1&1&-10&-2\end{bmatrix}$ 的秩.

解 $\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix}1&0&2&1&0\\0&1&0&0&1\\0&5&1&4&6\\0&1&-3&-12&-2\end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&2&1&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&4&1\\0&0&-3&-12&-3\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&2&1&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&4&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$.

实际计算时，并不一定要将 $\boldsymbol{A}$ 用初等变换化为标准形，只需要将 $\boldsymbol{A}$ 化为一眼能看出它的秩的矩阵即可(比如阶梯形矩阵).

例 3 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&4&1&4\\3&-1&2&1&3\\1&2&3&2&2\\4&-2&3&0&1\end{bmatrix}$ 的秩.

解 对 $\boldsymbol{A}$ 进行一系列初等行变换，将 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&4&1&4\\3&-1&2&1&3\\1&2&3&2&2\\4&-2&3&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&2&2\\0&-7&-7&-5&-3\\0&-3&-2&-3&0\\0&-10&-9&-8&-7\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&3&2&2\\0&-7&-7&-5&-3\\0&0&1&-\dfrac{6}{7}&\dfrac{9}{7}\\0&0&0&0&-4\end{bmatrix}.$$

故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=4$.

习题 2-6

1. 求下列矩阵的秩：

(1) $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&-2&4&5\\1&10&1&2\end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix}3&2&1&1\\1&2&-3&2\\4&4&-2&3\end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix}2&-1&3&3\\3&1&-5&0\\4&-1&1&3\\1&3&-13&-6\end{bmatrix}$.

2. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a&1&1\\2&1&a\\1&1&a\end{bmatrix},$$

且矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的秩为 2，求 a.

3. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&a&a&a\\a&1&a&a\\a&a&1&a\\a&a&a&1\end{bmatrix},$$

问：(1) a 取何值时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆？

(2) a 取何值时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3？

(3) a 取何值时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1？

2.7 行列式和矩阵的 MATLAB 求解

2.7.1 行列式的 MATLAB 求解

在 MATLAB 中求解行列式，需先建立矩阵. 矩阵的建立需遵循以下基本规则：

(1) 整个矩阵应以“[ ]”为首尾，即整个输入矩阵必须包含在方括号中；

(2) 矩阵中，行与行之间必须用分号“;”或 Enter 键(按 Enter 键)符分隔；

(3) 每行中的元素用逗号“,”或空格分隔.

例 1 在 MATLAB 中建立矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{bmatrix}$.

解 在 MATLAB 命令窗口输入以下命令：

```
>> A =
        1     2     3     4
        5     6     7     8
        9    10    11    12
       13    14    15    16
```

在 MATLAB 中我们只需借助函数 det 就可以求出行列式的值，其格式为：det(A)，其中 A 为 n 阶方阵.

例 2 计算行列式 $\begin{vmatrix}1&0&2&1\\-1&2&2&3\\2&3&3&1\\0&1&2&1\end{vmatrix}$ 的值.

解 在 MATLAB 命令窗口输入以下命令：

(1) 输入矩阵.

```
>> A=[1 0 2 1;-1 2 2 3;2 3 3 1;0 1 2 1]
A =
     1     0     2     1
    -1     2     2     3
     2     3     3     1
     0     1     2     1
```

(2) 输入 det(A)命令.

```
>> det(A)
ans =
    14
```

所以该行列式的值为 14.

函数 det 也可以用于计算含有变量的行列式，但需先用 syms 声明变量.

例 3 计算行列式 $\begin{vmatrix}a&1&0&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}$ 的值.

解 在 MATLAB 命令窗口输入以下命令：

(1) 声明变量，并输入矩阵.

```
>> syms a b c d
>> A=[a 1 0 0;-1 b 1 0;0 -1 c 1;0 0 -1 d]
```

```
A =
      a      1      0      0
     -1      b      1      0
      0     -1      c      1
      0      0     -1      d
```

(2) 输入 det(A)命令.

```
>> DA = det(A)
DA = a*b*c*d+a*b+a*d+c*d+1.
```

所以该行列式的值为 a*b*c*d+a*b+a*d+c*d+1.

2.7.2 矩阵的 MATLAB 求解

在 MATLAB 中，矩阵的基本运算有矩阵相加、矩阵相减、矩阵数乘、矩阵相乘、矩阵相除、矩阵的逆、矩阵的秩.

例 4 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 5 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$ 的和与差.

解 在 MATLAB 命令窗口输入以下命令：

(1) 输入矩阵.

```
>> A = [1 2 3;2 1 2;3 3 1]
A =
   1     2     3
   2     1     2
   3     3     1
>> B = [3 2 4;2 5 3;2 3 1]
B =
   3     2     4
   2     5     3
   2     3     1
```

(2) 用+和−实现矩阵加减.

```
>> C = A + B
C =
   4     4     7
   4     6     5
   5     6     2
>> D = A - B
D =
    -2     0    -1
     0    -4    -1
     1     0     0
```

例 5 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ 与 10 的乘积.

解 在 MATLAB 命令窗口输入以下命令：

(1) 输入矩阵.

```
>> A=[1 0 1;2 1 1;1 2 1]
A =
    1     0     1
    2     1     1
    1     2     1
```

(2) 输入 10 * A 或 A * 10.

```
>> B=10*A
B =
    10     0    10
    20    10    10
    10    20    10
```

例 6 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 2\\3 & 3 & 1\end{bmatrix}$与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\2 & 5 & 3\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}$的乘积.

解 在 MATLAB 命令窗口输入以下命令：

(1) 输入矩阵.

```
>> A=[1 2 3;2 1 2;3 3 1]
A =
    1     2     3
    2     1     2
    3     3     1
>> B=[3 2 4;2 5 3;2 3 1]
B =3     2     4
    2     5     3
    2     3     1
```

(2) 输入 A * B 和 B * A.

```
>> C=A*B
C =
    13    21    13
    12    15    13
    17    24    22
>> D=B*A
D =
    19    20    17
    21    18    19
    11    10    13
```

比较 C 和 D,可以看出 A * B 和 B * A 的结果完全不同.

例 7 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 1 & -1\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}$的逆矩阵.

解 在 MATLAB 命令窗口输入以下命令：

(1) 输入矩阵.

```
>> A=[1 -1 2;0 1 -1;2 1 0]
A =
    1    -1     2
    0     1    -1
    2     1     0
```

(2) 输入函数 inv(A)求 A 的逆矩阵.

```
>> C=inv(A)
C =
    -1    -2     1
     2     4    -1
     2     3    -1
```

例 8 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&2&1\\2&1&3\end{bmatrix}$和矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&2&1\\3&2&1\end{bmatrix}$相除.

解 在 MATLAB 命令窗口输入以下命令：

(1) 输入矩阵.

```
>> A=[1 2 3;4 2 1;2 1 3]
A =
    1     2     3
    4     2     1
    2     1     3
>> B=[2 1 2;1 2 1;3 2 1]
B =
    2     1     2
    1     2     1
    3     2     1
```

(2) 输入 A\B 和 A/B.

```
>> C=A\B 矩阵左除,相当于 inv(A)*B
C =
      0.3333      0.6000     -0.2000
     -0.6667     -0.4000      0.8000
      1.0000      0.4000      0.2000
>> D=A/B 矩阵右除,相当于 A *inv(B)
D =
    1.3333      1.3333     -1.0000
         0     -0.5000      1.5000
    1.6667      0.1667     -0.5000
```

例 9 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1&2\\1&2&2&1\\1&2&1&2\\2&2&1&1\end{bmatrix}$的秩.

解 在 MATLAB 命令窗口输入以下命令：

(1) 输入矩阵.

```
>> A = [2 1 1 2;1 2 2 1;1 2 1 2;2 2 1 1]
A =
    2     1     1     2
    1     2     2     1
    1     2     1     2
    2     2     1     1
```

(2) 输入 rank(A)求 A 的秩.

```
>> rank(A)
ans =
      4
```

所以 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 4.

习题 2-7

1. 用 MATLAB 求下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 7 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} x & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & y & -2 \\ z & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & k & 2 \end{vmatrix}$.

2. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$和矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,在 MATLAB 中求：

(1) $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}*\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}$.

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

(3) 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩.

总 习 题 2

1. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}, 2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{C}$.

2. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

且矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足方程 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$,求 $\boldsymbol{X}$.

3. 设 $\begin{bmatrix} a+2b & 2a-b \\ 2c+d & c-2d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$,求 a,b,c 和 d.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，且 $k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，证明：$k=0$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

5. 计算下列矩阵的乘积

(1) $\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\\ 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 8 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$；

(2) $\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\end{bmatrix}$；

(4) $\begin{bmatrix}x & y & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ b_1 & b_2 & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^3,\boldsymbol{A}^n$（$n$ 是正整数）.

7. 求所有与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

8. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{P}$ 都是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，证明 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 也是对称矩阵.

9. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，证明：$\boldsymbol{AB}$ 也是对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

10. 找出一个满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{I}$ 的二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$.

11. 如果 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I})$，证明 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{I}$.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵，证明：

(1) $\boldsymbol{A}^2$ 是对称矩阵；

(2) $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 是对称矩阵；

(3) $\boldsymbol{AB}$ 是反对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，证明：若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

15. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，求：

(1) $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}$；

(2) $3\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2+5\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}$.

16. 设 $f(\lambda)=\lambda^2-\lambda+1$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$，求 $f(\boldsymbol{A})$.

17. 求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\begin{bmatrix}1 & 6\\ 3 & -2\end{bmatrix}$；

(2) $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$；

(4) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 4\end{bmatrix}$；

(5) $\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\1 & -2 & 1\\5 & -2 & -3\end{bmatrix}$;　　(6) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\0 & 1 & 2\\1 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

18. 解下列矩阵方程：

(1) $\boldsymbol{X}\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\0 & 3 & 4\\0 & 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 1 & -2\\-5 & -3 & 7\end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix}a & & \\ & b & \\ & & c\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$, a,b,c 全不为零；

(3) $\boldsymbol{XP}=\boldsymbol{PB}$，其中

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\1 & -1 & 0\\1 & 1 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix},$$

并计算 $\boldsymbol{X}^5$.

19. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\\2 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}^*$ 与 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$，$(\boldsymbol{A}^*)^*$.

20. 已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & 1 & 2 & 3\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}$ 中所有元素的代数余子式之和.

21. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，且 $-\boldsymbol{A}$ 是 $-\boldsymbol{A}^*+k\boldsymbol{A}^{-1}$ 的逆矩阵，求 k.

22. (1) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{X}$，且

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\0 & 1 & 2\\1 & 0 & 3\end{bmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

(2) 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

且矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXA}+\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{BXA}+\boldsymbol{I}$，其中 $\boldsymbol{I}$ 是三阶单位矩阵，求 $\boldsymbol{X}$.

23. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是非奇异矩阵，证明：

$$(\boldsymbol{ABC})^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

24. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵,下列命题是否成立?

(1) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也可逆;

(2) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆,则 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆;

(3) 若 $\boldsymbol{AB}$ 都可逆,则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆.

25. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$,证明:$\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵.

26. 设矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可逆,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为同阶矩阵,且满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{O}$,证明:$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 都可逆.

27. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵,且 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{BA}^{-1}$ 可逆,证明:$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 可逆,并给出其逆矩阵的表示式.

28. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶非零实矩阵,且 $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,证明:$|\boldsymbol{A}|=-1$.

29. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 可逆,且 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}$,证明:矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可逆.

30. 用分块矩阵计算下列乘积:

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

31. (1) 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 都可逆,求 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}^{-1}$.

(2) 设矩阵 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$ 都可逆,求

$$\begin{bmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1 \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_s & & & \end{bmatrix}^{-1}.$$

32. 利用矩阵分块,求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为非零常数.

33. 求下列各矩阵的秩：

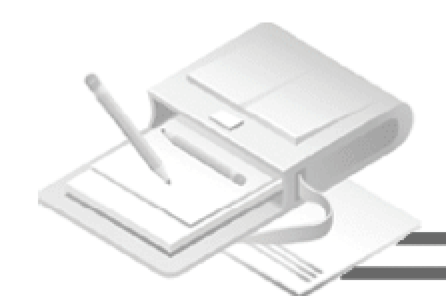
(1) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$；

(2) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -13 & -6 \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$；

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$；

(5) $\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$.



第 3 章

线性方程组

求解线性方程组的问题被认为是数学中最重要的问题之一.在第 1 章里我们已经讨论过由 n 个未知数 n 个方程构成的线性方程组.本章我们将利用矩阵的秩进一步讨论方程的个数与未知量的个数不相等的线性方程组的解的判定和解的结构等问题,还要讨论与线性方程组密切相关的向量和向量组的概念,以及线性相关性等.

3.1 线性方程组的消元解法

3.1.1 高斯消元法

考虑一般的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 表示 n 个未知量,m 是方程的个数,$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$称为此线性方程组的**系数**,$b_j(j=1,2,\cdots,n)$称为**常数项**.

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 称为线性方程组(3.1)的**系数矩阵**,$\overline{\boldsymbol{A}}$ 称为此线性方程组的**增广矩阵**,$\boldsymbol{x}$ 称为**未知量矩阵**,$\boldsymbol{b}$ 称为**常数项矩阵**.从而,线性方程组(3.1)的矩阵形式可表示为

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}.$$

在中学代数中,已经学过用消元法解简单的线性方程组,这一方法也适用于求解一般的线性方程组(3.1),并可用其增广矩阵的初等变换表示其求解过程.

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=6,\\ x_1-x_2-2x_3=-3,\\ 3x_1-x_2-x_3=4.\end{cases} \tag{①}$$

解 第一步，在线性方程组①中，交换第一个方程和第二个方程的位置，得

$$\begin{cases}x_1-x_2-2x_3=-3,\\ 2x_1+x_2+x_3=6,\\ 3x_1-x_2-x_3=4.\end{cases} \tag{②}$$

第二步，将线性方程组②中第二个方程与第三个方程分别加上第一个方程的 -2 倍和 -3 倍，得

$$\begin{cases}x_1-x_2-2x_3=-3,\\ \qquad 3x_2+5x_3=12,\\ \qquad 2x_2+5x_3=13.\end{cases} \tag{③}$$

第三步，将线性方程组③中第二个方程乘以 $\frac{1}{3}$，得

$$\begin{cases}x_1-x_2-2x_3=-3,\\ \qquad x_2+\frac{5}{3}x_3=4,\\ \qquad 2x_2+5x_3=13.\end{cases} \tag{④}$$

第四步，保留线性方程组④中的第一个和第二个方程，消去第三个方程中的 x_2. 为此，将第三个方程加上第二个方程的 -2 倍，得

$$\begin{cases}x_1-x_2-2x_3=-3,\\ \qquad x_2+\frac{5}{3}x_3=4,\\ \qquad\qquad \frac{5}{3}x_3=5.\end{cases} \tag{⑤}$$

线性方程组⑤是一个阶梯形线性方程组，从线性方程组⑤的第三个方程可以得到 x_3 的值，然后再逐次代入前两个方程，求出 x_2，x_1，则得到线性方程组①的解. 现将其方法叙述如下：

第五步，将线性方程组⑤的第三个方程乘以 $\frac{3}{5}$，得

$$\begin{cases}x_1-x_2-2x_3=-3,\\ \qquad x_2+\frac{5}{3}x_3=4,\\ \qquad\qquad x_3=3.\end{cases} \tag{⑥}$$

第六步，将线性方程组⑥中第一个方程及第二个方程分别加上第三个方程的 2 倍及 $-\frac{5}{3}$ 倍，得

$$\begin{cases}x_1-x_2 \qquad =3,\\ \qquad x_2 \qquad =-1,\\ \qquad\qquad x_3=3.\end{cases} \tag{⑦}$$

第七步，将线性方程组⑦中第一个方程加上第二个方程，得

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad =2, \\ \qquad x_2 \qquad =-1, \\ \qquad\qquad x_3=3. \end{cases} \tag{⑧}$$

显然，线性方程组①至线性方程组⑧都是同解线性方程组，因而⑧式是线性方程组①的解.

这个解法就是**高斯消元法**，由原线性方程组化为阶梯形线性方程组的过程，称为消元过程. 由阶梯形线性方程组逐步求得各未知量的过程，称为回代过程. 线性方程组①至线性方程组⑥是消元过程，线性方程组⑦至线性方程组⑧是回代过程.

上面的求解过程，可以用线性方程组①的增广矩阵的初等行变换表示：

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 12 \\ 0 & 2 & 5 & 13 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 13 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

由最后一个矩阵得到此线性方程组的解

$$x_1=2, \quad x_2=-1, \quad x_3=3.$$

由本节中的例 1 可以看出，用消元法解线性方程组的过程，实质上就是对该线性方程组的增广矩阵施以相应的初等行变换的过程. 解线性方程组时，为了书写简明，只要写出线性方程组的增广矩阵的变换过程即可.

用消元法解线性方程组的一般步骤如下：

首先写出线性方程组(3.1)的增广矩阵$\overline{\boldsymbol{A}}$

第一步，设 $a_{11}\neq 0$，否则，将增广矩阵$\overline{\boldsymbol{A}}$的第一行与另一行互换，使第一行第一列的元素不为零.

第二步，第一行乘$\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right)$再加到第 i 行上($i=2,3,\cdots,m$)，使$\overline{\boldsymbol{A}}$成为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{bmatrix}.$$

对这个矩阵的第二行到第 m 行，第二列到第 n 列再按以上步骤进行，如果有必要，可重新安排方程中未知量的次序(这样也不会影响方程组的解)，最后可以得到如下形状的阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} & a'_{1r+1} & \cdots & a'_{1n} & d_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2r} & a'_{2r+1} & \cdots & a'_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{rr} & a'_{rr+1} & \cdots & a'_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

其中 $a'_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,r)$.

其相应的阶梯形线性方程组为

$$\begin{cases} a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+\cdots+a'_{1r}x_r+a'_{1r+1}x_{r+1}+\cdots+a'_{1n}x_n=d_1, \\ \qquad a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2r}x_r+a'_{2r+1}x_{r+1}+\cdots+a'_{2n}x_n=d_2, \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a'_{rr}x_r+a'_{rr+1}x_{r+1}+\cdots+a'_{rn}x_n=d_r, \\ \qquad\qquad\qquad 0=d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad 0=0, \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad 0=0, \end{cases} \tag{3.3}$$

其中 $a'_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,r)$.

易知线性方程组(3.3)与线性方程组(3.1)是同解的线性方程组.

由线性方程组(3.3)可见，化为“0=0”形式的方程式为多余的方程，去掉它们不影响线性方程组的解.

我们只需讨论阶梯形线性方程组(3.3)的解的各种情形，便可知道原线性方程组(3.1)的解的情形.

(1) 如果 $d_{r+1}\neq 0$，则线性方程组(3.3)无解，从而线性方程组(3.1)无解.

(2) 如果 $d_{r+1}=0$，又分以下两种情形：

① 当 $r=n$ 时，线性方程组(3.3)可写成

$$\begin{cases} a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+\cdots+a'_{1n}x_n=d_1, \\ \qquad a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n=d_2, \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a'_{nn}x_n=d_n. \end{cases} \tag{3.4}$$

因 $a'_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,r)$，所以它有唯一解. 从方程组(3.4)中最后一个方程解出 x_n，再代入第 $n-1$ 个方程，求出 x_{n-1}. 如此继续下去，则可求出其他未知量，得出它的唯一解. 从而得出

线性方程组(3.1)的唯一解.

② 当 $r<n$ 时,线性方程组(3.3)可写成

$$\begin{cases} a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+\cdots+a'_{1r}x_r=d_1-a'_{1r+1}x_{r+1}-\cdots-a'_{1n}x_n, \\ \qquad a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2r}x_r=d_2-a'_{2r+1}x_{r+1}-\cdots-a'_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a'_{rr}x_r=d_r-a'_{rr+1}x_{r+1}-\cdots-a'_{rn}x_n. \end{cases} \tag{3.5}$$

这表明 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 可作为**自由未知量**.将自由未知量任意给定的一组值,代入线性方程组(3.5)中就可以唯一确定 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 相应的值,把两组数合并起来就得到线性方程组(3.5)的一组解.由此可见,当 $r<n$ 时,线性方程组(3.1)有无穷多解.

综合以上分析,我们可以得出线性方程组解的判定定理.

定理 3.1 线性方程组(3.1)有解的充分必要条件是系数矩阵的秩等于其增广矩阵的秩,即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})$,并且:

(1) 当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=n$ 时,则线性方程组(3.1)有唯一解;

(2) 当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})<n$ 时,则线性方程组(3.1)有无穷多解.

根据上述充分必要条件,当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\neq\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})$ 时,线性方程组(3.1)无解.

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1, \\ -2x_1+3x_2+x_3=2, \\ x_1+6x_2-4x_3=3. \end{cases}$$

解 对线性方程组的增广矩阵$\overline{\boldsymbol{A}}$施以初等行变换,化为阶梯形矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & -4 & 3 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=3$,所以线性方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=1, \\ x_3=1. \end{cases}$$

例 3 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=4, \\ -x_1-x_3=-3, \\ x_1+2x_2+3x_3=5. \end{cases}$$

解 对线性方程组的增广矩阵$\overline{\boldsymbol{A}}$施以初等行变换：

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&2&4\\-1&0&-1&-3\\1&2&3&5\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&2&4\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{array}\right]$$
$$\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&2&4\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&1&3\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right].$$

因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$,所以此线性方程组有无穷多解：

$$\begin{cases}x_1=3-x_3,\\x_2=1-x_3.\end{cases}$$

取 $x_3=c_1$(其中 c_1 为任意常数),则此线性方程组的全部解为

$$\begin{cases}x_1=3-c_1,\\x_2=1-c_1,\\x_3=c_1.\end{cases}$$

例 4 解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+3x_2+4x_3=5,\\x_1-x_2=1,\\-x_1+2x_2+x_3=2.\end{cases}$$

解 对线性方程组的增广矩阵$\overline{\boldsymbol{A}}$进行初等变换：

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&3&4&5\\1&-1&0&1\\-1&2&1&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&3&4&5\\0&-4&-4&-4\\0&5&5&7\end{array}\right]$$
$$\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&3&4&5\\0&1&1&1\\0&5&5&7\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&3&4&5\\0&1&1&1\\0&0&0&2\end{array}\right].$$

因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\neq\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})$,所以线性方程组无解.

例 5 设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=0,\\2x_1+x_2+6x_3+4x_4=-2,\\3x_1+2x_2+kx_3+7x_4=t,\\x_1-x_2+6x_3-x_4=-4.\end{cases}$$

问 k,t 取何值,线性方程组有解？无解？

解 对线性方程组的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 进行初等变换：

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&2&3&0\\2&1&6&4&-2\\3&2&k&7&t\\1&-1&6&-1&-4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&2&3&0\\0&-1&2&-2&-2\\0&-1&k-6&-2&t\\0&-2&4&-4&-4\end{array}\right]$$
$$\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&2&3&0\\0&-1&2&-2&-2\\0&0&k-8&0&t+2\\0&0&0&0&0\end{array}\right].$$

(1) 当 $k\neq 8$ 时，由于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，所以线性方程组有解.

(2) 当 $k=8$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}\rightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

当 $t\neq -2$ 时，由于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，$\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\neq\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})$，所以线性方程组无解.

当 $t=-2$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}\rightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right],$$

由于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=2$，所以线性方程组有解.

综上所述：

当 $k\neq 8$ 或 $k=8$ 且 $t=-2$ 时，线性方程有解；

当 $k=8$ 且 $t\neq -2$ 时，线性方程组无解.

3.1.2 齐次线性方程组解的判定

齐次线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0,\end{cases}\tag{3.6}$$

其矩阵形式为

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{o}.$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$为系数矩阵，$\boldsymbol{o}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$为常数项零矩阵.

由于齐次线性方程组(3.6)的增广矩阵$\overline{\boldsymbol{A}}$的最后一列全为零，所以，任何一个齐次线性方程组均满足 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})$，因此，齐次线性方程组(3.6)恒有解，因为它至少有一个零解，即 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.

将定理 3.1 应用到齐次线性方程组，于是有下面的定理.

定理 3.2 齐次线性方程组(3.6)解的情况如下：

(1) 当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$ 时，线性方程组只有零解；

(2) 当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n$ 时，线性方程组有非零解.

推论 如果方程的个数少于未知量的个数，即 $m<n$，则齐次线性方程组(3.6)有非零解.

例 6 解齐次线性方程组

$$\begin{cases} -x_1+x_2-x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ 2x_1-x_2-2x_3-x_4=0. \end{cases}$$

解 对齐次线性方程组的增广矩阵$\overline{\mathbf{A}}$进行初等变换：

$$\overline{\mathbf{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

因 $r(\mathbf{A})=3<4$，所以此线性方程组有非零解. 原线性方程组的同解线性方程组为：

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad -x_4=0, \\ \qquad x_2 \qquad +x_4=0, \\ \qquad\qquad x_3-x_4=0. \end{cases}$$

设 $x_4=c_1$（c_1 为任意常数），于是得到齐次线性方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1=c_1, \\ x_2=-c_1, \\ x_3=c_1, \\ x_4=c_1. \end{cases}$$

习题 3-1

1. 用消元法解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=3, \\ 3x_1+x_2-5x_3=0, \\ 4x_1-x_2+x_3=3, \\ x_1+3x_2-13x_3=-6; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1, \\ x_1-2x_2+x_3-5x_4=5; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1-x_2-2x_3+2x_4=-\dfrac{1}{2}, \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0. \end{cases}$

2. 确定 a,b 的值使下列线性方程组有解，并求其解：

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+2x_4=2, \\ \quad\ \ x_2-\ x_3-\ x_4=1, \\ x_1+\ x_2-\ x_3+3x_4=a, \\ x_1-\ x_2+\ x_3+5x_4=b; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} ax_1+\quad bx_2+\quad 2x_3=1, \\ \quad (b-1)x_2+\quad x_3=0, \\ ax_1+\quad bx_2+(1-b)x_3=3-2b. \end{cases}$

3.2 n 维向量空间

3.2.1 n 维向量的定义

在几何空间中，给定一个坐标系，可使几何向量与有序实数组(x,y,z)建立起一一对应的关系，从而可将几何向量记为(x,y,z). 在许多实际问题中仅用三个数来刻画是不够的，例如，为了刻画宇宙中某星球的大小和位置，就需要知道四个数，即星球的半径 r 与星球中心的坐标 x,y,z. 若要描述该星球在某一时刻 t 的状态，则需要用到五个数组成的有序数组(r,x,y,z,t). 因此有必要将几何向量推广到 n 维向量.

定义 3.1 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的有序数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为 n **维向量**. 数 a_i 称为向量的第 i 个分量. n 称为向量的维数. 分量是实数的向量称为**实向量**；分量是复数的向量称为**复向量**.

如不特别声明，本章主要讨论实向量.

常用希腊字母如 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$表示 n 维向量. 如

$$\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n] \quad 或 \quad \boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

都表示 n 维向量. 前者称为**行向量**，后者称为**列向量**. 两者没有本质区别，仅是写法上的不同. 可以将行向量看成一个行矩阵，列向量看成一个列矩阵. 利用矩阵的转置，有

$$[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=[a_1,a_2,\cdots,a_n].$$

设 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]$都是 n 维向量，当且仅当它们的各个对应的分量都相等，即 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$时，称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与向量 $\boldsymbol{\beta}$ 相等，记作 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$. 显然两个不同维数的向量一定不相等.

分量全为零的向量称为零向量，记作 $\boldsymbol{o}$，即

$$\boldsymbol{o}=[0,0,\cdots,0].$$

若 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，则称$[-a_1,-a_2,\cdots,-a_n]$为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**负向量**，记为$-\boldsymbol{\alpha}$.

3.2.2 向量的运算

定义 3.2 设 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]$都是 n 维向量，称向量

$$[a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n]$$

为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和，记作 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，即

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=[a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n].$$

定义 3.3 设 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1, a_2, \cdots, a_n]$为 n 维向量，k 为实数，则称向量

$$[ka_1, ka_2, \cdots, ka_n]$$

为数 k 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**数量乘积**，简称**数乘**，记作 $k\boldsymbol{\alpha}$，即

$$k\boldsymbol{\alpha}=[ka_1, ka_2, \cdots, ka_n].$$

有了加法，也可以定义向量的减法. 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的差 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 定义为 $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$，即

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})=[a_1-b_1, a_2-b_2, \cdots, a_n-b_n].$$

向量的加、减和数乘运算统称为向量的线性运算.

定义 3.4 所有 n 维实向量的集合记为$\mathbb{R}^n$，我们称$\mathbb{R}^n$为**实 n 维向量空间**，它是指在$\mathbb{R}^n$中定义了加法及数乘这两种运算. 这两种运算满足以下 8 条规律：

(1) 加法交换律：即 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

(2) 加法结合律：即$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；

(3) 对任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$，有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{\alpha}$；

(4) 对任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$，有 $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{o}$；

(5) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$；

(6) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$；

(7) $(kl)\boldsymbol{\alpha}=k(l\boldsymbol{\alpha})$；

(8) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$，即数 1 是数乘向量运算的单位元.

其中，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 都是 n 维向量，$\boldsymbol{o}$ 为 n 维零向量，k, l 为实数.

例 1 设 $\boldsymbol{\alpha}=[1,0,4,7]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[3,2,-1,6]^{\mathrm{T}}$，求 $-\boldsymbol{\alpha}$ 及 $3\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta}$.

解 $-\boldsymbol{\alpha}=[-1,0,-4,-7]^{\mathrm{T}}$.

$$\begin{aligned}3\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta}&=3[1,0,4,7]^{\mathrm{T}}-2[3,2,-1,6]^{\mathrm{T}}\\&=[3,0,12,21]^{\mathrm{T}}-[6,4,-2,12]^{\mathrm{T}}\\&=[-3,-4,14,9]^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

习题 3-2

1. 已知向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,3],\quad \boldsymbol{\alpha}_2=[3,2,1],\quad \boldsymbol{\alpha}_3=[-2,0,2],\quad \boldsymbol{\alpha}_4=[1,2,4].$$

求：(1) $3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3+4\boldsymbol{\alpha}_4$；(2) $5\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$.

2. 已知向量

$$\boldsymbol{\alpha}=[3,5,7,9],\quad \boldsymbol{\beta}=[-1,5,2,0].$$

(1) 如果 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\beta}$，求 $\boldsymbol{\xi}$；(2) 如果 $3\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\eta}=5\boldsymbol{\beta}$，求 $\boldsymbol{\eta}$.

3. 已知向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[2,5,1,3],\quad \boldsymbol{\alpha}_2=[10,1,5,10],\quad \boldsymbol{\alpha}_3=[4,1,-1,1],$$

如果 $3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta})+2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\beta})$，求 $\boldsymbol{\beta}$.

3.3 向量间的线性关系

3.3.1 向量组的线性组合

对于两个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$,若存在一常数 k,使得

$$\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha},$$

则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 成比例. 例如,如果

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}-2\\6\\4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}$. 将这个概念推广到有限多个 n 维向量,我们引入线性组合(或线性表示)的概念.

定义 3.5 对于 n 维向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$,如果存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个**线性组合**,或称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ **线性表示**. 称 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 为**组合系数**或**表示系数**.

例如,设

$$\boldsymbol{\beta}=[4,1,-1],\quad \boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,-1],\quad \boldsymbol{\alpha}_2=[2,-3,1],$$

不难验证

$$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

即 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合,或者说 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示. 又如,对于任何一个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$ 都是 n 维向量

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

的一个线性组合,因为

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n.$$

称 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的 n 维**基本向量**. 如果将 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 都写成行向量,则也有同样的结果. 向量间的这种线性关系不因其是行向量还是列向量而有所改变.

3.3.2 线性方程组的向量表示

线性方程组(3.1)写成常数列向量与系数列向量如下的线性关系

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta},$$

称其为线性方程组(3.1)的向量形式,其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\alpha}_n=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$$

都是 m 维列向量.于是,线性方程组(3.1)是否有解,就相当于是否存在一组数:$x_1=k_1$,$x_2=k_2$,…,$x_m=k_m$,使线性关系式

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$$

成立.即常数列向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是否可以由上述系数列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.如果可以,则线性方程组有解;否则,线性方程组无解.

定理 3.3 设向量

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\alpha}_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix},\qquad j=1,2,\cdots,n$$

为 m 维列向量,则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示的充分必要条件是线性方程组(3.1)有解.

证 如果 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示,则存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta},$$

则 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 就是线性方程组(3.1)的一组解.反之,如果线性方程组(3.1)有一组解

$$x_1=c_1,\quad x_2=c_2,\quad \cdots,\quad x_n=c_n,$$

则有

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta},$$

即向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

推论 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示的充分必要条件是:以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为列向量的矩阵与以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$ 为列向量的矩阵有相同的秩.

证 线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$$

有解的充分必要条件是:系数矩阵与增广矩阵的秩相同.这就是说 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示的充分必要条件是:以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为列向量的矩阵与以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$ 为列向量的矩阵有相同的秩.

例 1 判断向量 $\boldsymbol{\beta}_1=[4,3,-1,11]$ 是否可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,-1,5]$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,-1,1,1]$ 线性表示.若可以,写出表达式.

解 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_1$,令矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}]$,对增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 施以初等行变换:

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{A}}&=[\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}]\\&=\begin{bmatrix}1&2&4\\2&-1&3\\-1&1&-1\\5&1&11\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&4\\0&-5&-5\\0&3&3\\0&-9&-9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&4\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

由此可知

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=2.$$

因此 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示,且由上面的初等变换可知 $k_1=2$,$k_2=1$,故得 $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.

例 2 设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\2\\a\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}3\\1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}4\\-1\\6\\b\end{bmatrix}.$$

讨论 a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？并写出所有的表达式.

解 令增广矩阵$\overline{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}]$，对$\overline{\boldsymbol{A}}$施以初等行变换：

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\2&0&1&-1\\a&1&1&6\\2&0&1&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&0&1&-1\\0&1&2&5\\0&0&-2-a&2+a\\0&0&0&b+1\end{bmatrix}.$$

当 $b\neq-1$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\neq\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})$，线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 无解，故 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

当 $b=-1,a\neq-2$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解：

$$x_1=0,\quad x_2=7,\quad x_3=-1,$$

故 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示系数唯一，表示式为：

$$\boldsymbol{\beta}=7\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3.$$

当 $b=-1,a=-2$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，其解为：

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}c,\\x_2=5-2c,\\x_3=c,\end{cases}$$

其中 c 为任意常数. 故 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且其表示式有无穷多，其表示式为：

$$\boldsymbol{\beta}=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}c\right)\boldsymbol{\alpha}_1+(5-2c)\boldsymbol{\alpha}_2+c\boldsymbol{\alpha}_3.$$

3.3.3 线性相关和线性无关

定义 3.6 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为 n 维向量组，如果存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{o},\tag{3.7}$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ **线性相关**；如果当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时，(3.7)式才成立，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ **线性无关**.

若向量组仅含有一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，由定义 3.6 知，当 $\boldsymbol{\alpha}$ 为零向量时是线性相关的；当 $\boldsymbol{\alpha}$ 为非零向量时是线性无关的.

若向量组仅含有两个向量，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，由定义 3.6 知，$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 对应分量成比例，即 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$.

例 3 判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$是否线性相关.

解 考查 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=k_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，解得 $k_1=k_2=0$，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性

无关.

例 4 证明：包含零向量的向量组一定线性相关.

证 设向量组为 $\boldsymbol{o},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$. 由于

$$1\cdot\boldsymbol{o}+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{o},$$

即 $k_1=1,k_2=k_3=\cdots=k_m=0$ 不全为零，从而向量组 $\boldsymbol{o},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

判断向量组的线性相关性，可以转化为齐次线性方程组是否有非零解的问题. 设 n 维向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{bmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{ni}\end{bmatrix},\qquad i=1,2,\cdots,m,$$

令

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{o}.$$

根据向量的对应分量相等，上式可以写成齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=0,\\\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=0.\end{cases}\tag{3.8}$$

由此我们可以得出如下的结论.

定理 3.4 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组(3.8)有非零解，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充分必要条件是齐次线性方程组(3.8)只有零解.

定理 3.5 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充分必要条件是：以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为列向量的矩阵的秩小于向量的个数 m.

证 齐次线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{o}$$

有非零解的充分必要条件是：系数矩阵的秩小于未知数的个数 m，由此定理得证.

此定理也有另一说法，即：

n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充分必要条件是：以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为列向量的矩阵的秩等于向量的个数 m.

推论 1 设 n 个 n 维向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{bmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{ni}\end{bmatrix},\qquad i=1,2,\cdots,n$$

线性相关的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0,$$

或者说，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0.$$

推论 2 当向量组中所含向量的个数大于向量的维数时，此向量组线性相关.

例 5 证明 $\mathbb{R}^n$ 中的基本向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关.

证 因为 $|\boldsymbol{I}_n|=1\neq 0$，故 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关.

例 6 讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[2,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,2,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[-2,3,0]^{\mathrm{T}}$ 的线性相关性.

解 因为

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=15\neq 0,$$

所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

例 7 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$，讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性相关性.

解 因为

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \end{vmatrix}=0,$$

所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

例 8 判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,-1,5]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,-1,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[4,3,-1,11]^{\mathrm{T}}$ 是否线性相关.

解 对矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$ 施以初等变换行化为阶梯形矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & -9 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由此可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2<3$，由定理 3.5 得，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

例 9 讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的线性相关性.

解 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 4 个三维向量，由定理 3.5 的推论 2 可知，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线

性相关.

例 10 证明：如果向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

证 设存在一组数 k_1,k_2,k_3，使

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+k_2(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})+k_3(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{o} \qquad ①$$

成立，整理得

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}+(k_1+k_2)\boldsymbol{\beta}+(k_2+k_3)\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{o}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，故

$$\begin{cases} k_1+\qquad k_3=0, \\ k_1+k_2\qquad =0, \\ \qquad k_2+k_3=0. \end{cases} \qquad ②$$

因为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$，故线性方程组②仅有零解，即只有 $k_1=k_2=k_3=0$ 时①式才成立，因而向量组 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

定理 3.6 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中有一部分向量（称为部分组）线性相关，则整个向量组线性相关.

证 不失一般性，设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关（$s<m$）. 于是存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{o},$$

从而有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s,0,\cdots,0$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+0\boldsymbol{\alpha}_{s+1}+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{o}.$$

因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

此定理也可如下叙述：若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则其任一部分组的向量都线性无关.

3.3.4 关于线性组合与线性相关的定理

定理 3.7 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$（$m\geqslant 2$）线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

证 （必要性）若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{o}.$$

不失一般性，设 $k_1\neq 0$，于是

$$\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{k_3}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_3-\cdots-\frac{k_m}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合.

（充分性）如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中至少有一个向量是其余向量的线性组合，不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，即存在数 $l_2,l_3,\cdots,l_m$，使

$$\boldsymbol{\alpha}_1=l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

因此存在一组不全为零的数 $-1,l_2,l_3,\cdots,l_m$ 使

$$(-1)\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{o}$$

成立,即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

定理3.7建立了线性相关与线性组合这两个概念之间的联系.显然,由两个向量组成的向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关的充分必要条件是存在数 k,使 $\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\beta}$ 或 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$,也就是它们的分量对应成比例.从几何上看,两个二维或三维向量构成的向量组线性相关表示它们共线.

例11 设有向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-1,1,0],\quad \boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,1,0],\quad \boldsymbol{\alpha}_3=[0,1,0,0],$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{o}$,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.由 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{o}$ 可得

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2.$$

定理3.8 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,而向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,且表示法唯一.

证 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,所以存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 及 k,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+k\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{o}.$$

下面用反证法证明 $k\neq0$.

若 $k=0$,则 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零,且有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{o}.$$

这与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关矛盾,从而 $k\neq0$.于是

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_m}{k}\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

下面也用反证法证明表示法唯一.

假设由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示 β 有两种表示方法,设

$$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m,\quad \boldsymbol{\beta}=h_1\boldsymbol{\alpha}_1+h_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+h_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

将两式相减,得

$$(l_1-h_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(l_2-h_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(l_m-h_m)\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{o}.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关可知

$$l_1-h_1=l_2-h_2=\cdots=l_m-h_m=0,$$

即 $l_1=h_1,l_2=h_2,\cdots,l_m=h_m$,所以表示法唯一.

例12 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 个线性无关的 n 维向量,向量

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n, \qquad ①$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 全不为零.证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中任意 n 个向量都线性无关.

证 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 个线性无关的 n 维向量,所以我们只需证明,将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中的任何一个向量换成 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 后所得的向量组线性无关即可.设将 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 换为 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 后所得的向量组为

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1},\quad i=2,\cdots,n,$$

或

$$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1},\quad i=1.$$

我们用反证法证明它们线性无关.设

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$$

线性相关,由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的部分组,所以它们线性无关. 由定理 3.8 可知,$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示,且表示系数唯一,即

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+l_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+l_n\boldsymbol{\alpha}_n.$$

将上式与①式两端分别相减,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{o}=&(k_1-l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_{i-1}-l_{i-1})\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+\\&k_i\boldsymbol{\alpha}_i+(k_{i+1}-l_{i+1})\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+(k_n-l_n)\boldsymbol{\alpha}_n.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,因而

$$k_i=0,\quad k_s-l_s=0,\quad s=1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n.$$

这显然与 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 全不为零相矛盾. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 线性无关. 由 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的任意性可知,结论成立.

习题 3-3

1. 将下列各题中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 表示为其他向量的线性组合:

(1) $\boldsymbol{\beta}=[3,5,-6]$,$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,1]$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,1]$,$\boldsymbol{\alpha}_3=[0,-1,-1]$;

(2) $\boldsymbol{\beta}=[2,-1,5,1]$,$\boldsymbol{\varepsilon}_1=[1,0,0,0]$,$\boldsymbol{\varepsilon}_2=[0,1,0,0]$,$\boldsymbol{\varepsilon}_3=[0,0,1,0]$,$\boldsymbol{\varepsilon}_4=[0,0,0,1]$.

2. 判定下列向量组是线性相关还是线性无关:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,-1]$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[-2,2,0]$,$\boldsymbol{\alpha}_3=[3,-5,2]$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,3,1]$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[3,-1,2,4]$,$\boldsymbol{\alpha}_3=[2,2,7,-1]$.

3. 设 $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\beta}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$,验证:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

4. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,试证向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

3.4 极大线性无关组与向量组的秩

3.4.1 向量组的等价

为讨论两个 n 维向量组之间的关系,设有下面的两个向量组:

$$(\text{Ⅰ})\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\qquad (\text{Ⅱ})\ \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t.$$

定义 3.7 若向量组(Ⅰ)中的每个向量都能由向量组(Ⅱ)线性表示,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1&=a_{11}\boldsymbol{\beta}_1+a_{21}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{t1}\boldsymbol{\beta}_t,\\\boldsymbol{\alpha}_2&=a_{12}\boldsymbol{\beta}_1+a_{22}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{t2}\boldsymbol{\beta}_t,\\&\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_s&=a_{1s}\boldsymbol{\beta}_1+a_{2s}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{ts}\boldsymbol{\beta}_t,\end{aligned}$$

则称**向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表示**. 用矩阵表示为

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t]\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1s}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{t1}&a_{t2}&\cdots&a_{ts}\end{bmatrix}.$$

记矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{ts} \end{bmatrix},$$

则上式可表示为

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t]\boldsymbol{A},$$

称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示的**表示矩阵**.

若向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)可以互相线性表示,则称向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)**等价**.

定理 3.9 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示,且向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示,则向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示.

证 由已知条件,可设

$$\boldsymbol{\gamma}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_s\boldsymbol{\alpha}_s=\sum_{i=1}^{s}l_i\boldsymbol{\alpha}_i,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i=k_{i1}\boldsymbol{\beta}_1+k_{i2}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{it}\boldsymbol{\beta}_t=\sum_{j=1}^{t}k_{ij}\boldsymbol{\beta}_j,\quad i=1,2,\cdots,s,$$

于是

$$\boldsymbol{\gamma}=\sum_{i=1}^{s}l_i\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{i=1}^{s}l_i\Big(\sum_{j=1}^{t}k_{ij}\boldsymbol{\beta}_j\Big)=\sum_{j=1}^{t}\Big(\sum_{i=1}^{s}l_ik_{ij}\Big)\boldsymbol{\beta}_j,$$

即向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示.

由此可知,向量组的线性表示是有传递性的,即若向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表示,向量组(Ⅱ)可由向量组(Ⅲ)线性表示,则向量组(Ⅰ)也可由向量组(Ⅲ)线性表示.

因此向量组之间的等价关系有下面的性质:

(1) **反身性**,即每个向量组与自身等价.

(2) **对称性**,即若向量组(Ⅰ)和向量组(Ⅱ)等价,那么向量组(Ⅱ)和向量组(Ⅰ)也等价.

(3) **传递性**,即若向量组(Ⅰ)和向量组(Ⅱ)等价,向量组(Ⅱ)和向量组(Ⅲ)等价,那么向量组(Ⅰ)和向量组(Ⅲ)也等价.

定理 3.10 设有两个向量组

$$(\text{Ⅰ})\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s \quad 及 \quad (\text{Ⅱ})\ \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t.$$

如果向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表示且 $s>t$,则向量组(Ⅰ)线性相关.

证 由于向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表示,故存在 $t\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$,使得

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t]\boldsymbol{A}.$$

记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s]$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 为 $t\times s$ 矩阵,所以 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s$ 为 s 个 t 维列向量. 因为 $s>t$,由定理 3.5 的推论 2 可知,$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s$ 线性相关,即存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使得

$$k_1\boldsymbol{\gamma}_1+k_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\gamma}_s=\boldsymbol{o},$$

即

$$[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s]\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{bmatrix}=\boldsymbol{o},$$

于是考虑

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_s\end{bmatrix},$$

则有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t]\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_s\end{bmatrix}=\boldsymbol{o}.$$

由上面的结论可知,这里的 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 不全为零,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

推论 1 设有两个向量组

$$(\text{Ⅰ})\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s \quad 及 \quad (\text{Ⅱ})\ \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t.$$

如果向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表示且向量组(Ⅰ)线性无关,那么 $s\leqslant t$.

推论 2 两个线性无关的等价的向量组必含有相同个数的向量.

3.4.2 极大线性无关组

定义 3.8 设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的部分向量组,它满足:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关;

(2) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的每一个向量都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示.

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大线性无关组,简称**极大无关组**.

例 1 设向量组 A 为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是向量组 A 的一个极大无关组.事实上,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是向量组 A 的极大无关组.

由本节中的例 1 看到,向量组的极大无关组可能不止一个,但其所含向量个数是相同的.

由定义 3.8 可以得出下面的定理.

定理 3.11 一个线性无关的向量组的极大无关组就是该向量组本身.

同时,我们还可以证明.

定理 3.12 任何一个向量组都与它的极大无关组等价.

证 设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大无关组.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一部分,所以当然可以被这个向量组线性

表示,即

$$\boldsymbol{\alpha}_{i_j}=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+1\cdot\boldsymbol{\alpha}_{i_j}+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_m,\qquad j=1,2,\cdots,r.$$

下面证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示.

对于 $\boldsymbol{\alpha}_j(j=1,2,\cdots,m)$,当 j 是 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 中一个数时,显然 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示;当 j 不是 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 中的数时,由极大无关组的定义可知,$\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性相关,即存在不全为零的数 $l,k_1,k_2,\cdots,k_r$ 使

$$l\boldsymbol{\alpha}_j+k_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+k_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_{i_r}=\boldsymbol{o}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关,则必有 $l\neq0$(否则,若 $l=0$,则 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 不全为零,就是 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性相关,这与题设矛盾.),于是

$$\boldsymbol{\alpha}_j=-\frac{k_1}{l}\boldsymbol{\alpha}_{i_1}-\frac{k_2}{l}\boldsymbol{\alpha}_{i_2}-\cdots-\frac{k_r}{l}\boldsymbol{\alpha}_{i_r},$$

就是说 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 可以被 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示,从而说明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可以被 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示. 于是证明了向量组与它的极大无关组等价.

由于向量组的极大无关组可能不止一个,但由于每一个极大无关组都与向量组本身等价,因此一个向量组的任意两个极大无关组都是等价的.

3.4.3 向量组的秩

定义 3.9 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组所含向量的个数,称为**向量组的秩**,记为

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m).$$

规定全由零向量组成的向量组的秩为零.

由向量组秩的定义可知,线性无关的向量组的秩等于向量组中所包含向量的个数;若向量组的秩小于向量组中所包含向量的个数,则该向量组必线性相关.

另外,一个向量组的极大无关组可能不唯一,但是向量组的秩是唯一的. 本节例 1 中向量组 A 的秩为 2,它反映了向量组本身的性质.

定理 3.13 如果一个向量组的秩为 $r(r>0)$,则向量组中任意 r 个线性无关的向量都是它的一个极大无关组.

证 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 r,且 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中 r 个线性无关的向量. 设 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 是向量组中任一个向量,则

$$\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$$

线性相关,否则与 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=r$ 相矛盾. 由定理 3.4 知,$\boldsymbol{\alpha}_j$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示. 故 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为向量组的一个极大无关组.

定理 3.14 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示,则

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t).$$

证 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的极大无关组分别为 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_k}$,则由定理 3.12 知:

$$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}\text{ 与 }\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\text{ 等价},$$
$$\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_k}\text{ 与 }\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\text{ 等价}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示,所以,$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_k}$ 线性表示,由定理 3.10 的推论 1 知,$r\leqslant k$,即

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t).$$

推论 等价向量组的秩相等.

3.4.4 向量组的秩与矩阵的秩的关系

定义 3.10 矩阵的**行秩**是指矩阵行向量组的秩;矩阵的**列秩**是指矩阵列向量组的秩.

矩阵的行秩和列秩,以及矩阵本身的秩有着下面的关系:

定理 3.15 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 r 的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列(行)秩等于 r.

证 (必要性)设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,如果 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$,则存在 $\boldsymbol{A}$ 的一个 r 阶子式不为零,不妨设

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}\neq 0.$$

令

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix},$$

则由秩的定义知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1)=r$,由定理 3.5 的另一说法知,$\boldsymbol{A}_1$ 的 r 个列向量线性无关,即 $\boldsymbol{A}$ 中有 r 个列向量线性无关.

下面再证明 $\boldsymbol{A}$ 的任何 $r+1$ 个列向量线性相关.

用反证法.假设 $\boldsymbol{A}$ 中有 $r+1$ 个列向量线性无关,不妨设

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1\,r+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2\,r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & a_{mr+1} \end{bmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的 $r+1$ 个线性无关的列向量组成的矩阵.则由定理 3.5 的另一说法知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_2)=r+1$,由矩阵秩的定义知,$\boldsymbol{A}_2$ 有 $r+1$ 阶子式不为零,即 $\boldsymbol{A}$ 有 $r+1$ 阶子式不为零,这与 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$ 矛盾.因此 $\boldsymbol{A}$ 的任何 $r+1$ 个列向量均线性相关.于是知 $\boldsymbol{A}$ 的列秩为 r.

(充分性)如果 $\boldsymbol{A}$ 的列秩为 r,不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 列为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组.令

$$\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix},$$

于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_3)=r$,故 $\boldsymbol{A}_3$ 中有 r 阶子式不为零,即 $\boldsymbol{A}$ 中有 r 阶子式不为零.

下面再证明 $\boldsymbol{A}$ 的任何 $r+1$ 阶子式都为零.

用反证法.假设 $\boldsymbol{A}$ 中有一个 $r+1$ 阶子式不为零,不妨设

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

令

$$\boldsymbol{A}_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr+1} \end{bmatrix},$$

则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_4)=r+1$,即 $\boldsymbol{A}_4$ 的 $r+1$ 个列向量线性无关,即 $\boldsymbol{A}$ 的前 $r+1$ 个列向量线性无关. 这与 $\boldsymbol{A}$ 的列秩为 r 矛盾,因此 $\boldsymbol{A}$ 的任何 $r+1$ 阶子式都为零,于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$.

推论 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩与列秩相等.

设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$,若存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,使 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{o}$ 时,有 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{o}$ 成立,且反之亦成立,我们就说这两个向量组有相同的线性关系.

定理 3.16 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$,那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组有相同的线性关系.

由定理 3.16 我们可以得到求向量组的一个极大无关组的解题方法.

用已知向量组为列向量构成矩阵 $\boldsymbol{A}$,对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换化为行标准形矩阵,其列向量之间的线性关系及列向量的极大无关组可以直观地看出来. 从而可以得到 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的线性关系,且可以求出相应的列向量组的一个极大无关组. 从而可确定已知向量组的线性关系并求出一个极大无关组.

例 2 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[2,4,2]$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,0]$,$\boldsymbol{\alpha}_3=[2,3,1]$,$\boldsymbol{\alpha}_4=[3,5,2]$的一个极大无关组与秩,并把其余向量用该极大无关组线性表示.

解 对矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}]$施以初等行变换:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}.$$

显然 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$,由最后一个矩阵可知,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为一个极大无关组,且

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \\ \boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2. \end{cases}$$

例 3 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 及 $\boldsymbol{B}_{n\times s}$ 为两个矩阵,证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积的秩不大于 $\boldsymbol{A}$ 的秩和 $\boldsymbol{B}$ 的秩,即

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}.$$

证 设

$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$， $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times s}$， $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times s}=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s]$，

即

$$[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}.$$

因此有 $\boldsymbol{\gamma}_j=b_{1j}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2j}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{nj}\boldsymbol{\alpha}_n(j=1,2,\cdots,s)$，即 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，故 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s$ 的极大无关组可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的极大无关组线性表示，由定理 3.10 及定理 3.15 有，$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

又因为 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，由上面讨论知

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}).$$

而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{B}).$$

因而

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}.$$

习题 3-4

1. 求下列向量组的一个极大无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,0,1]$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[0,1,0,-1]$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[0,0,1,-1]$，$\boldsymbol{\alpha}_4=[2,-1,3,0]$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,1,0,1]$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[0,1,1,0,1]$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,0,0,1]$，$\boldsymbol{\alpha}_4=[-3,-2,3,0,-1]$.

2. 求下列向量组的极大无关组与秩.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}3\\-5\\2\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\3\\1\\3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}2\\-4\\-1\\-3\end{bmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\3\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\2\\-1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}14\\7\\0\\3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}4\\2\\-1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{bmatrix}6\\5\\1\\2\end{bmatrix}$.

3. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r，证明：其中任意选取 m 个向量所构成的向量组的秩大于 $r+m-s$.

4. 证明：$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

3.5 线性方程组解的结构

由 3.1 节与向量组线性关系的讨论，我们已经知道：

n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{o}$ 有非零解 $\Leftrightarrow\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关.

本节要讨论的问题是：当齐次线性方程组有非零解时，解的结构如何？怎样求出它的所有的解？

3.5.1 齐次线性方程组解的结构

齐次线性方程组(3.6)的矩阵形式为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o},$$

其中

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{2} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 是齐次线性方程组(3.6)的 s 个解向量，则它们的线性组合

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s=\sum_{i=1}^{s}k_i\boldsymbol{\eta}_i$$

仍是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 的解向量，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为任意常数.

由上述可知，当齐次线性方程组有非零解时，则它必有无穷多个解. 由于齐次线性方程组(3.6)的解向量是 n 维向量，故齐次线性方程组(3.6)的线性无关的解向量的个数不可能多于 n 个. 因而使我们想到，是否存在一个与齐次线性方程组(3.6)的全体解向量等价的线性无关的向量组，使得齐次线性方程组(3.6)的任何一个解向量都能由它们线性表示？

当齐次线性方程组(3.6)有非零解时，这样一组解向量必定存在. 为此，我们引入齐次线性方程组的基础解系的概念.

定义 3.11 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 的一组解向量，如果满足：

(1) $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 线性无关；

(2) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 的任意一个解向量都可由 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 线性表示.

则称 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 的一个**基础解系**.

定理 3.17 如果齐次线性方程组(3.6)的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r<n$，则此线性方程组的基础解系存在，且每个基础解系中，恰含有 $n-r$ 个解向量.

证 因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r<n$，所以对齐次线性方程组(3.6)的增广矩阵 $[\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{o}]$ 施以初等变换，可化为如下的形式：

$$\left[\begin{array}{cccccccc:c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & c_{1,r+2} & \cdots & c_{1n} & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & c_{2,r+2} & \cdots & c_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & c_{r,r+2} & \cdots & c_{rn} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right].$$

于是原线性方程组与下面的线性方程组同解：

$$\begin{cases} x_1=-c_{1,r+1}x_{r+1}-c_{1,r+2}x_{r+2}-\cdots-c_{1n}x_n, \\ x_2=-c_{2,r+1}x_{r+1}-c_{2,r+2}x_{r+2}-\cdots-c_{2n}x_n, \\ \qquad\vdots \\ x_r=-c_{r,r+1}x_{r+1}-c_{r,r+2}x_{r+2}-\cdots-c_{rn}x_n, \end{cases}$$

其中 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 为自由未知量.

对 $n-r$ 个自由未知量分别取

$$\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \cdots,\quad \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

可得齐次线性方程组(3.6)的 $n-r$ 个解向量.

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}-c_{1,r+1}\\-c_{2,r+1}\\\vdots\\-c_{r,r+1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}-c_{1,r+2}\\-c_{2,r+2}\\\vdots\\-c_{r,r+2}\\0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\eta}_{n-r}=\begin{bmatrix}-c_{1n}\\-c_{2n}\\\vdots\\-c_{rn}\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}.$$

现在来证明 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 就是齐次线性方程组(3.6)的一个基础解系.

首先证明 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性无关.

设

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-c_{1,r+1} & -c_{1,r+2} & \cdots & -c_{1n}\\ -c_{2,r+1} & -c_{2,r+2} & \cdots & -c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -c_{r,r+1} & -c_{r,r+2} & \cdots & -c_{rn}\\ 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{n\times(n-r)},$$

它有 $n-r$ 阶子式

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=1\neq 0,\quad \text{即}\quad \mathrm{r}(\boldsymbol{C})=n-r.$$

所以 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性无关.

其次再证明齐次线性方程组(3.6)的任意一个解都可由 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性表示.设

$$\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

是齐次线性方程组(3.6)的一个解向量.因为

$$\begin{cases} d_1=-c_{1,r+1}d_{r+1}-c_{1,r+2}d_{r+2}-\cdots-c_{1n}d_n, \\ d_2=-c_{2,r+1}d_{r+1}-c_{2,r+2}d_{r+2}-\cdots-c_{2n}d_n, \\ \qquad\vdots \\ d_r=-c_{r,r+1}d_{r+1}-c_{r,r+2}d_{r+2}-\cdots-c_{rn}d_n, \end{cases}$$

所以

$$\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix} -c_{1,r+1}d_{r+1}-c_{1,r+2}d_{r+2}-\cdots-c_{1n}d_n \\ -c_{2,r+1}d_{r+1}-c_{2,r+2}d_{r+2}-\cdots-c_{2n}d_n \\ \vdots \\ -c_{r,r+1}d_{r+1}-c_{r,r+2}d_{r+2}-\cdots-c_{rn}d_n \\ d_{r+1} \\ d_{r+2} \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$=d_{r+1}\begin{bmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}+d_{r+2}\begin{bmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}+\cdots+d_n\begin{bmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=d_{r+1}\boldsymbol{\eta}_1+d_{r+2}\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+d_n\boldsymbol{\eta}_{n-r},$$

即 $\boldsymbol{\eta}$ 可由 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性表示.

综上可得,$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是齐次线性方程组(3.6)的一个基础解系,因此齐次线性方程组(3.6)的全部解为

$$c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}, \tag{3.9}$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$ 为任意常数.

称式(3.9)为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{o}$ 的**通解**(也称为**一般解**).

推论 齐次线性方程组(3.6)的任意 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 个线性无关的解都是该方程组的基础解系.

定理 3.17 的证明过程给我们指出了求齐次线性方程组的基础解系的方法.

例 1 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+4x_4-3x_5=0, \\ x_1-x_2+3x_3-2x_4-x_5=0, \\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4-5x_5=0, \\ 3x_1+x_2+5x_3+6x_4-7x_5=0 \end{cases}$$

的基础解系与通解.

解 方程个数 $m=4$,未知量个数 $n=5$,$m<n$,因此所给齐次线性方程组有无穷多个解. 对增广矩阵$[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{o}]$施以初等行变换

$$[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{o}]=\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

即原齐次线性方程组与齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1=-2x_3-x_4+2x_5, \\ x_2=x_3-3x_4+x_5 \end{cases}$$

同解,其中 x_3,x_4,x_5 为自由未知量.

令自由未知量$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$分别取值$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,得齐次线性方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

于是原齐次线性方程组的通解为

$$\boldsymbol{\eta}=c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2+c_3\boldsymbol{\eta}_3,$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

例 2 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times k$ 矩阵,满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,证明

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant n.$$

证 将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 按列分块为 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k]$，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，得

$$[\boldsymbol{A\beta}_1,\boldsymbol{A\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{A\beta}_k]=[\boldsymbol{o},\boldsymbol{o},\cdots,\boldsymbol{o}],$$

即有

$$\boldsymbol{A\beta}_i=\boldsymbol{o},\qquad i=1,2,\cdots,k.$$

这表明矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的每个列向量都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{o}$ 的解. 又 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{o}$ 的基础解系中含有 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 个解，从而

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k)\leqslant n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),$$

即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

3.5.2 非齐次线性方程组解的结构

设有非齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\qquad\qquad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}$$

其矩阵形式为

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\tag{3.10}$$

其中 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=[b_1,b_2,\cdots,b_m]^{\mathrm{T}}$.

如果将常数项换成 $\boldsymbol{o}$，即取 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$，得到齐次线性方程组，即

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{o}.\tag{3.11}$$

称上述齐次线性方程组(3.11)为非齐次线性方程组(3.10)的导出组.

非齐次线性方程组与其导出组的解具有以下性质.

性质1 如果 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 是非齐次线性方程组(3.10)的一个解，$\boldsymbol{\eta}_0$ 是其导出组的一个解，则 $\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}_0$ 也是非齐次线性方程组(3.10)的一个解.

证 因为 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，所以有 $\boldsymbol{A\gamma}_0=\boldsymbol{b}$，同理 $\boldsymbol{A\eta}_0=\boldsymbol{o}$，则由

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}_0)=\boldsymbol{A\gamma}_0+\boldsymbol{A\eta}_0=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{b}$$

得 $\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}_0$ 是非齐次线性方程组(3.10)的解.

性质2 如果 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 是非齐次线性方程组的两个解，则 $\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2$ 是其导出组的解.

证 由 $\boldsymbol{A\gamma}_1=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A\gamma}_2=\boldsymbol{b}$，及

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2)=\boldsymbol{A\gamma}_1-\boldsymbol{A\gamma}_2=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$$

得 $\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2$ 为其导出组的解.

定理3.18 如果 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 是非齐次线性方程组(3.10)的一个解(称为**特解**)，$\boldsymbol{\eta}$ 是其导出组的通解，则非齐次线性方程组的通解为

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta},$$

即非齐次线性方程组的通解可以表示为它的一个特解加上其导出组的通解.

证 由性质1知道 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 加上其导出组的一个解仍是非齐次线性方程组的一个解，所以只需证明，非齐次线性方程组的任意一个解 $\boldsymbol{\gamma}'$，一定是 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 与其导出组的某一个解 $\boldsymbol{\eta}_0$ 的和. 取

$$\boldsymbol{\eta}_0=\boldsymbol{\gamma}'-\boldsymbol{\gamma}_0.$$

由性质 2 知，$\boldsymbol{\eta}_0$ 是导出组的一个解，于是得到

$$\boldsymbol{\gamma}'=\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}_0,$$

即非齐次线性方程组的任意一个解，都可以表示为它的一个特解与其导出组某一个解的和.

由此定理可知，如果非齐次线性方程组有解，则只需求出它的一个特解，并求出其导出组的基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$，则其通解可以表示为

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0+c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r},$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$ 为任意常数.

由此可知，如果非齐次线性方程组的导出组仅有零解，则该非齐次线性方程组只有一个解，如果其导出组有无穷多个解，则它也有无穷多个解.

例 3 求下列线性方程组的通解：

$$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3-x_4=-1, \\ x_1-2x_2+x_3+3x_4=3, \\ 3x_1+8x_2-x_3+x_4=1, \\ x_1-9x_2+3x_3+7x_4=7. \end{cases}$$

解 对此非齐次线性方程组的增广矩阵 $[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}]$ 施以初等行变换：

$$[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}]=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -14 & 4 & 8 & 8 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{13}{7} & \frac{13}{7} \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{13}{7} & \frac{13}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

即原非齐次线性方程组与线性方程组

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{13}{7}-\dfrac{3}{7}x_3-\dfrac{13}{7}x_4, \\ x_2=-\dfrac{4}{7}+\dfrac{2}{7}x_3+\dfrac{4}{7}x_4 \end{cases}$$

同解，其中 x_3,x_4 为自由未知量.

让自由未知量 $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ 取值 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，则得到此线性方程组的一个特解

$$\boldsymbol{\gamma}_0=\begin{bmatrix}\frac{13}{7}\\-\frac{4}{7}\\0\\0\end{bmatrix}.$$

原非齐次线性方程组的导出组与齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1=-\frac{3}{7}x_3-\frac{13}{7}x_4,\\x_2=\frac{2}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4\end{cases}$$

同解，其中 x_3,x_4 为自由未知量.

对自由未知量 $\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}$ 分别取值 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，即得导出组的基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}-\frac{3}{7}\\\frac{2}{7}\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}-\frac{13}{7}\\\frac{4}{7}\\0\\1\end{bmatrix}.$$

于是原非齐次线性方程组的通解为

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0+c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}\frac{13}{7}\\-\frac{4}{7}\\0\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}-\frac{3}{7}\\\frac{2}{7}\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-\frac{13}{7}\\\frac{4}{7}\\0\\1\end{bmatrix},$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

例 4 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3+4\boldsymbol{\alpha}_4$，求非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解 由题意知，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关且 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4$，所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$. 因此导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{o}$ 的基础解系只含一个解向量 $\boldsymbol{\eta}_1$. 由

$$\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{o},$$

知 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{o}$ 的一个基础解系. 又

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3+4\boldsymbol{\alpha}_4,$$

即

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}=\boldsymbol{\beta},$$

所以 $\boldsymbol{\gamma}_0=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解. 因此非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0+c_1\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}(c_1\text{ 为任意常数}).$$

习题 3-5

1. 求下列齐次线性方程组的基础解系及通解:

(1) $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0,\\3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0,\\4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0,\\3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0,\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0,\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0,\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0.\end{cases}$

2. 求下列线性方程组的通解:

(1) $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3-3x_4=1,\\3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=2,\\4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=1,\\3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=5;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x_1+3x_2+5x_3-4x_4=1,\\x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1,\\x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=3,\\x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=3,\\x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=-1.\end{cases}$

3. k 取何值时,下列方程组无解?有唯一解?或有无穷多组解?在有无穷多组解时,求出其通解.

(1) $\begin{cases}kx+y+z=1,\\x+ky+z=k,\\x+y+kz=k^2;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}2x-y-z=2,\\x-2y+z=k,\\x+y-2z=k^2.\end{cases}$

4. 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵的秩为 r, $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是其导出组的一个基础解系, $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$ 的一个解,证明:

(1) $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性无关;

(2) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有 $n-r+1$ 个线性无关的解.

3.6 线性方程组的 MATLAB 求解

线性方程组的 MATLAB 求解步骤：

(1) 输入系数矩阵 A 和增广矩阵 Ab=[A b].

(2) 利用求秩命令 rank 分别求矩阵 A 和 Ab 的秩 rA=rank(A)和 rAb=rank(Ab).

(3) 根据 rA 和 rAb 的关系求解线性方程组的解.

若 rA=rAb=n,则存在唯一解,这时利用矩阵除法 A\b 求解；

若 rA=rAb<n,则存在无穷多解,这时利用 rref 求解 Ab 的行最简形矩阵；

若 rA≠rAb,则无解.

例 1 利用 MATLAB 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5, \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2, \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2, \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0. \end{cases}$$

解 在 MATLAB 命令窗口输入以下命令：

(1) 输入矩阵.

```
>> A = [1 1 1 1; 1 2 -1 4;2 -3 -1 -5;3 1 2 11]
A =
     1     1     1     1
     1     2    -1     4
     2    -3    -1    -5
     3     1     2    11
>> b = [5; -2; -2;0]
b =
     5
    -2
    -2
     0
>> Ab = [A b]
Ab =
     1     1     1     1     5
     1     2    -1     4    -2
     2    -3    -1    -5    -2
     3     1     2    11     0
```

(2) 利用 rank 求矩阵的秩.

```
>> rA = rank(A)
rA =
     4
>> rAb = rank(Ab)
```

```
rAb =
        4
```

(3) 因为 rA= rAb=4,所以线性方程组有唯一解.

```
>> x0 = A\b
x0 =
        1
        2
        3
      - 1
```

所以线性方程组有唯一解: $\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=2, \\ x_3=3, \\ x_4=-1. \end{cases}$

例 2 利用 MATLAB 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3-x_4=-1, \\ x_1-2x_2+x_3+3x_4=3, \\ 3x_1+8x_2-x_3+x_4=1, \\ x_1-9x_2+3x_3+7x_4=7. \end{cases}$$

解 在 MATLAB 命令窗口输入以下命令:

(1) 输入矩阵.

```
>> A = [1 5 -1 -1;1 -2 1 3;3 8 -1 1;1 -9 3 7]
A =
      1      5     - 1     - 1
      1    - 2       1       3
      3      8     - 1       1
      1    - 9       3       7
>> b = [ - 1;3;1;7]
b =
    - 1
      3
      1
      7
>> Ab = [A b]
Ab =
      1      5     - 1     - 1     - 1
      1    - 2       1       3       3
      3      8     - 1       1       1
      1    - 9       3       7       7
```

(2) 利用 rank 求矩阵的秩.

```
>> rA = rank(A)
rA =
```

```
     2
>> rAb = rank(Ab)
rAb =
     2
```

(3) 因为 rA= rAb= 2<4,所以线性方程组有无穷多解.

```
>> rref(Ab)
ans =
     1          0          3/7        13/7        13/7
     0          1         -2/7        -4/7        -4/7
     0          0          0           0           0
     0          0          0           0           0
```

所以线性方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{13}{7}-\dfrac{3}{7}x_3-\dfrac{13}{7}x_4, \\ x_2=-\dfrac{4}{7}+\dfrac{2}{7}x_3+\dfrac{4}{7}x_4. \end{cases}$$

取 $x_3=c_1, x_4=c_2$(其中 c_1, c_2 为任意常数),则此线性方程组的全部解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{13}{7}-\dfrac{3}{7}c_1-\dfrac{13}{7}c_2, \\ x_2=-\dfrac{4}{7}+\dfrac{2}{7}c_1+\dfrac{4}{7}c_2, \\ x_3=c_1, \\ x_4=c_2. \end{cases}$$

例 3 利用 MATLAB 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=1, \\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4=2, \\ 2x_1+x_2+2x_3-2x_4=3. \end{cases}$$

解 在 MATLAB 命令窗口输入以下命令:

(1) 输入矩阵.

```
>> A = [1 -2 3 -1;3 -1 5 -3;2 1 2 -2]
A =
     1    -2     3    -1
     3    -1     5    -3
     2     1     2    -2
>> b = [1;2;3]
b =
     1
     2
     3
>> Ab = [A b]
Ab =
     1    -2     3    -1     1
```

```
     3    -1    5    -3    2
     2     1    2    -2    3
```

(2) 利用 rank 求矩阵的秩.

```
>> rA = rank(A)
rA =
     2
>> rAb = rank(Ab)
rAb =
     3
```

(3) 因为 rA≠rAb,所以此线性方程组无解.

习题 3-6

利用 MATLAB 求下列线性方程组的解.

(1) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1, \\ -2x_1+3x_2+x_3=2, \\ x_1+6x_2-4x_3=3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=4, \\ -x_1-x_3=-3, \\ x_1+2x_2+3x_3=5; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3=5, \\ x_1-x_2=1, \\ -x_1+2x_2+x_3=2. \end{cases}$

总 习 题 3

1. 设 $5(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+4(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})=2(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma})$,求向量 $\boldsymbol{\gamma}$. 其中

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2. 把向量 $\boldsymbol{\beta}$ 表示成向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合,其中

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. 设向量组

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

问:(1) a,b 取何值时,向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合,并写出 $a=1,b=\frac{1}{3}$ 时 $\boldsymbol{\beta}$ 的表达式;

(2) a,b 取何值时,向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

4. 判断下列向量组的线性相关性：

(1) $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$；　　(4) $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$.

5. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 3)$线性无关，指出向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$ 是线性相关还是线性无关并说明理由.

6. 设向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，证明向量 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}$ 也线性无关.

7. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，而向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关，且 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 都不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\beta$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\gamma}$ 等价.

8. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，但其中任意 $m-1$ 个向量都线性无关，证明：必存在 m 个全不为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{o}.$$

9. 求下列向量组的秩及其一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}3\\5\\2\end{bmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}6\\4\\-1\\-1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\\-4\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\4\\-9\\-16\\22\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}7\\1\\0\\-1\\3\end{bmatrix}$.

10. 设有向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}3\\2\\1\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\3\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}2\\2\\2\\-1\end{bmatrix}.$$

(1) 求此向量组的秩，并讨论它的线性相关性；

(2) 求此向量组的一个极大线性无关组；

(3) 把其余向量表示成为该极大线性无关组的线性组合.

11. 求下列齐次线性方程组的基础解系和通解：

(1) $\begin{cases}2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0,\\3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0,\\4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0,\\x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0,\\3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=0,\\4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=0.\end{cases}$

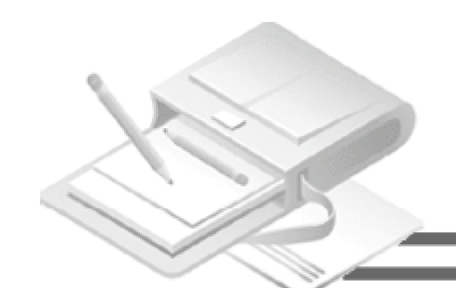
12. 求下列非齐次线性方程租的通解：

(1) $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 14x_3 = 6; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

13. 设线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + ax_3 + 7x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = b. \end{cases}$$

讨论 a,b 取何值时，线性方程组有解或无解，并在有解时求出全部解.



第 4 章

矩阵的特征值

本章我们所讨论的矩阵均为方阵. 对于方阵 $\boldsymbol{A}$,尽管变换 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 可能会把向量 $\boldsymbol{x}$ 往各种方向上移动,但其中存在一些特殊的向量,$\boldsymbol{A}$ 在其上的作用十分简单.

例如,设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -2\\1 & 0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{x}$,即 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 上的作用相当于将向量 $\boldsymbol{x}$ 拉伸为原来的两倍.

在本章中,我们要研究形如 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$($\lambda$ 为一数量)的方程,并且求那些被 $\boldsymbol{A}$ 作用相当于用数乘作用的向量,此即为方阵的特征值与特征向量,它们不仅在纯数学和应用数学中有广泛的应用,并且在工程设计、生态系统分析等许多学科领域中具有广泛的应用背景.

4.1 向量的内积

4.1.1 内积与性质

定义 4.1 设有 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$,称

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积.

不难验证内积具有以下性质(其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 为 n 维向量,k 为实数):

(1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$;

(2) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$;

(3) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$;

(4) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$,当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{o}$ 时,有$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$.

4.1.2 向量的长度与性质

定义 4.2 设 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$,称

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度.

向量长度具有以下性质:

(1) $\|\boldsymbol{\alpha}\|\geqslant 0$,当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{o}$ 时,有 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=0$;

(2) $\|k\boldsymbol{\alpha}\|=|k|\|\boldsymbol{\alpha}\|$($k$ 为实数);

(3) 对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$,有 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$. 这一不等式称为**柯西-施瓦茨不等式**.

长度为 1 的向量称为**单位向量**,向量 $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}$ 是一个单位向量. 这是因为 $\left\|\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\right\|=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\|\boldsymbol{\alpha}\|=1$.

用非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度去除向量 $\boldsymbol{\alpha}$,得到一个单位向量,这一过程通常称为把向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 单位化.

4.1.3 正交向量组

定义 4.3 如果两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积等于零,即 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$,则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ **正交**(垂直).

显然,若 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{o}$,则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与任何向量都正交.

定义 4.4 如果非零向量组两两正交,则称该向量组为**正交向量组**. 如果一个正交向量组中的每一个向量都是单位向量,则称该向量组为**规范正交向量组**.

定理 4.1 正交向量组线性无关.

证 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是正交向量组,且有数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{o},$$

上式两边与向量组中的任意向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 求内积,得

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n)=0,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

可得

$$k_i(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)=0.$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_i\neq\boldsymbol{o}$,有 $(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)>0$,所以 $k_i=0(i=1,2,\cdots,n)$,即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

一个向量组线性无关是其成为正交向量组的必要条件. 从一个线性无关的向量组出发,求出一个与之等价的正交向量组的方法,称为**施密特正交化方法**.

对于线性无关向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,可按如下两个步骤进行规范正交化:

(1) 正交化,令

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1&=\boldsymbol{\alpha}_1,\\
\boldsymbol{\beta}_2&=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,\\
\boldsymbol{\beta}_3&=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2,\\
&\vdots\\
\boldsymbol{\beta}_n&=\boldsymbol{\alpha}_n-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_{n-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_{n-1})}\boldsymbol{\beta}_{n-1}.
\end{aligned}$$

这个过程称为施密特正交化过程. 施密特正交化过程可以将线性无关的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 化为与之等价的正交向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$.

(2) 单位化,令

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{e}_n=\frac{\boldsymbol{\beta}_n}{\|\boldsymbol{\beta}_n\|},$$

则 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 等价的规范正交向量组.

例 1 设线性无关的向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1,1]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=[3,3,-1,-1]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=[-2,0,6,8]^{\mathrm{T}},$$

试将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 规范正交化.

解 利用施密特正交化方法,令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1,1]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=[3,3,-1,-1]^{\mathrm{T}}-\frac{4}{4}[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}=[2,2,-2,-2]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=[-2,0,6,8]^{\mathrm{T}}-\frac{12}{4}[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}-\frac{-32}{16}[2,2,-2,-2]^{\mathrm{T}}$$

$$=[-1,1,-1,1]^{\mathrm{T}}.$$

再把它们单位化,取

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\frac{1}{2}[1,1,1,1]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\frac{1}{2}[1,1,-1,-1]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}=\frac{1}{2}[-1,1,-1,1]^{\mathrm{T}}.$$

即得规范正交向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$.

例 2 设 $\boldsymbol{a}=[1,0,-2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}=[-4,2,3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 正交,且 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$,求 λ 和 $\boldsymbol{c}$.

解 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}$,又 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 正交,则 $(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})-\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=0$,即

$$\lambda=\frac{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}=\frac{-4-6}{1+4}=-2,$$

从而 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}=[-2,2,-1]^{\mathrm{T}}$.

例 3 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是一个规范正交向量组,求 $\|4\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3\|$.

解 由题意可得:

$$(4\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,4\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3)=16(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)+4(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)+16(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3)=36.$$

于是 $\|4\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3\|=\sqrt{(4\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,4\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3)}=6$.

4.1.4 正交矩阵

定义 4.5 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}\quad(\text{即 }\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}),$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**正交矩阵**,简称**正交阵**.

正交矩阵具有以下性质:

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也是正交阵,且 $|\boldsymbol{A}|=1$ 或 $|\boldsymbol{A}|=-1$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是正交阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交阵.

定理 4.2 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充分必要条件是其列(行)向量组是规范正交向量组.

证 设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组,则

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}\alpha_1{}^{\mathrm{T}}\\ \alpha_2{}^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \alpha_n{}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=\begin{bmatrix}\alpha_1{}^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_1{}^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_1{}^{\mathrm{T}}\alpha_n\\ \alpha_2{}^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_2{}^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_2{}^{\mathrm{T}}\alpha_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_n{}^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_n{}^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_n{}^{\mathrm{T}}\alpha_n\end{bmatrix}=I.$$

上式等价于

$$\begin{cases}\alpha_i{}^{\mathrm{T}}\alpha_j=1, & i=j,\\ \alpha_i{}^{\mathrm{T}}\alpha_j=0, & i\neq j,\end{cases}\quad i,j=1,2,\cdots,n,$$

即 A 为正交矩阵的充分必要条件是其列向量组是规范正交向量组.

类似可证,A 为正交矩阵的充分必要条件是其行向量组是规范正交向量组.

例 4 验证矩阵

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

是正交阵.

证 P 的每个列向量都是单位向量,且两两正交,所以 P 是正交阵.

例 5 设 x 为 n 维列向量,$x^{\mathrm{T}}x=1$,令 $H=I-2xx^{\mathrm{T}}$,证明:H 是对称的正交阵.

证 因为 $H^{\mathrm{T}}=(I-2xx^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=I^{\mathrm{T}}-(2xx^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=I-2xx^{\mathrm{T}}=H$,所以

$$H^{\mathrm{T}}H=(I-2xx^{\mathrm{T}})(I-2xx^{\mathrm{T}})=I-2xx^{\mathrm{T}}-2xx^{\mathrm{T}}+4x(x^{\mathrm{T}}x)x^{\mathrm{T}}=I-4xx^{\mathrm{T}}+4xx^{\mathrm{T}}=I,$$

即 H 是对称的正交阵.

习题 4-1

1. 将下列各组向量规范正交化:

(1) $\alpha_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$;　　(2) $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

2. 判断下列矩阵是否为正交矩阵:

(1) $\begin{bmatrix}-3 & -3 & 1\\ -3 & 1 & 3\\ 1 & 3 & -3\end{bmatrix}$;　　(2) $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$.

3. 设 A 是正交矩阵,试证:A^* 也是正交矩阵.

4. 求与向量 $\alpha_1=[1,1,-1,1]^{\mathrm{T}},\alpha_2=[1,-1,1,1]^{\mathrm{T}},\alpha_3=[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}$ 都正交的单位向量.

4.2 矩阵的特征值与特征向量

定义 4.6 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，如果存在数 λ 和 n 维非零列向量 $\boldsymbol{x}$ 使

$$\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$$

成立，则称 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征值**，称 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的**特征向量**(或称为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量).

$\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$ 可写成 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$，这是一个含 n 个未知量 n 个方程的齐次线性方程组，它有非零解的充要条件是 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$.

称 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方程**，它是以 λ 为未知量的 n 次方程；称 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**，记作 $f(\lambda)$.

显然，$\boldsymbol{A}$ 的特征值就是特征方程的解，特征方程在复数域内都有解，其个数等于方程的次数(k 重根按 k 个计算)，因此，n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 在复数域内有 n 个特征值.

定理 4.3 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，那么 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$ 且

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}.$$

证 略.

设 λ_i 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，那么齐次线性方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 的非零解就是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_i 的特征向量.

例 1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，证明：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征值相同.

证 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=|(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式相同，从而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也相同.

例 2 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为：

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-4&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-5).$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=5$.

当 $\lambda_1=-1$ 时，解齐次线性方程组 $(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$.

$$-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&-2\\-4&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \text{得基础解系 } \boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},$$

所以对应于 $\lambda_1=-1$ 的全部特征向量为 $k\boldsymbol{p}_1(k\neq0)$.

当 $\lambda_2=5$ 时，解齐次线性方程组 $(5\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$.

$$5\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&-2\\-4&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}-2&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \text{得基础解系 } \boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},$$

所以对应于 $\lambda_2=5$ 的全部特征向量为 $k\boldsymbol{p}_2(k\neq0)$.

例 3 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2.$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=2$ 时,解齐次线性方程组 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$.

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 4 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad 得基础解系\ \boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},$$

所以 $k\boldsymbol{p}_1(k\neq 0)$ 是对应于 $\lambda_1=2$ 的全部特征向量.

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时,解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$.

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad 得基础解系\ \boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ 1\end{bmatrix},$$

所以 $k\boldsymbol{p}_2(k\neq 0)$ 是对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量.

例 4 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 由

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -6 & 0\\ 3 & \lambda+5 & 0\\ 3 & 6 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2=0$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=-2$ 时,解齐次线性方程组 $(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$.

$$-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-6 & -6 & 0\\ 3 & 3 & 0\\ 3 & 6 & -3\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad 得基础解系\ \boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix},$$

所以 $k\boldsymbol{p}_1(k\neq 0)$ 是对应于 $\lambda_1=-2$ 的全部特征向量.

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时,解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$.

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & -6 & 0\\ 3 & 6 & 0\\ 3 & 6 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad 得基础解系\ \boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}.$$

所以 $k_2\boldsymbol{p}_2+k_3\boldsymbol{p}_3(k_2,k_3$ 不全为 0)是对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量.

例 5 已知 0 是 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & a\end{bmatrix}$ 的特征值,求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

解 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,根据定理 2.1 知 $|\boldsymbol{A}|=0$,即 $|\boldsymbol{A}|=2a-2=0$,得 $a=1$.

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=2$.

对应 $\lambda_1=0$,由

$$-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad 得基础解系\ \boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},$$

所以 $k\boldsymbol{p}_1(k\neq0)$是对应于 $\lambda_1=0$ 的全部特征向量.

对应 $\lambda_2=\lambda_3=2$,由

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad 得基础解系\ \boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

所以 $k_2\boldsymbol{p}_2+k_3\boldsymbol{p}_3(k_2,k_3$ 不全为 0)是对应于 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的全部特征向量.

例 6 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,证明:

(1) $k\lambda$(k 是常数)是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值;

(2) 对正整数 $m(m\geqslant2)$,λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值;

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则$\dfrac{1}{\lambda}$是 $\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值.

证 由题意,有 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{o}$,使 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$,于是

(1) $(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=k(\boldsymbol{Ax})=k(\lambda\boldsymbol{x})=(k\lambda)\boldsymbol{x}$,即 $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值;

(2) $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{m-1}(\boldsymbol{Ax})=\lambda\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{A}^{m-2}(\boldsymbol{Ax})=\lambda^2\boldsymbol{A}^{m-2}\boldsymbol{x}=\cdots=\lambda^m\boldsymbol{x}$,即 λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值;

(3) $\boldsymbol{A}$ 可逆时,由 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$,有 $\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$. 又 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{o}$,则 $\lambda\neq0$,于是,$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}$,即$\dfrac{1}{\lambda}$是 $\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值.

由此例易知 $\varphi(\lambda)$是 $\varphi(\boldsymbol{A})$的特征值,其中,$\varphi(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$ 是 λ 的多项式,$\varphi(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式.

例 7 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,2,3$,求$|\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}|$.

解 设 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}$,则 $\varphi(\lambda)=\lambda^3-2\lambda+3$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$的特征值,可得 $\varphi(-1)=4$,$\varphi(2)=7,\varphi(3)=24$,于是$|\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}|=4\times7\times24=672$.

定理 4.4 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个特征值,$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 依次是与之对应的特征向量,如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 各不相等,则 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 线性无关.

证 用数学归纳法.

当 $m=1$ 时,因特征向量 $\boldsymbol{p}_1\neq\boldsymbol{o}$,故只含一个向量的向量组 $\boldsymbol{p}_1$ 线性无关.

假设当 $m=k-1$ 时结论成立,要证当 $m=k$ 时结论也成立,即假设向量组 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_{k-1}$线性无关,要证向量组 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_k$ 线性无关. 为此,令

$$x_1\boldsymbol{p}_1+x_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+x_k\boldsymbol{p}_k=\boldsymbol{o}, \tag{4.1}$$

用 $\boldsymbol{A}$ 左乘上式,得

$$x_1\boldsymbol{Ap}_1+x_2\boldsymbol{Ap}_2+\cdots+x_k\boldsymbol{Ap}_k=\boldsymbol{o},$$

即

$$x_1\lambda_1\boldsymbol{p}_1+x_2\lambda_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+x_k\lambda_k\boldsymbol{p}_k=\boldsymbol{o}. \tag{4.2}$$

(4.2)式减去(4.1)式的 λ_k 倍,得

$$x_1(\lambda_1-\lambda_k)\boldsymbol{p}_1+x_2(\lambda_2-\lambda_k)\boldsymbol{p}_2+\cdots+x_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)\boldsymbol{p}_{k-1}=\boldsymbol{o}.$$

按归纳法假设 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_{k-1}$ 线性无关,故 $x_i(\lambda_i-\lambda_k)=0(i=1,2,\cdots,k-1)$. 而 $\lambda_i-\lambda_k\neq0(i=1,2,\cdots,k-1)$,于是得 $x_i=0(i=1,2,\cdots,k-1)$,代入(4.1)式得 $x_k\boldsymbol{p}_k=\boldsymbol{o}$,而 $\boldsymbol{p}_k\neq\boldsymbol{o}$,得 $x_k=0$. 因此,向量组 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_k$ 线性无关.

习题 4-2

1. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量.

2. 设 $\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$,证明:$\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 3.

3. 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$,求:

(1) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值;

(2) $|\boldsymbol{B}|$;

(3) $|\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I}|$.

4. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

4.3 相似矩阵

4.3.1 相似矩阵的概念

定义 4.7 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵,若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**相似矩阵**,或称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

对 $\boldsymbol{A}$ 进行 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 运算称为对 $\boldsymbol{A}$ 进行相似变换,可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为**相似变换矩阵**.

矩阵的相似关系是一种等价关系,满足:

(1) $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$. 这是因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$. 由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 可知,存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,于是,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}=(\boldsymbol{P}^{-1})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$,即 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$.

(3) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$. 由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$ 可知,存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}$,于是 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q})$,即 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

4.3.2 相似矩阵的性质

性质 1 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$,$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

证 由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 知,存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,由矩阵秩的性质可知

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B}),\quad |\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{A}|.$$

性质 2 相似矩阵的可逆性相同,当它们可逆时,它们的逆矩阵也相似.

证 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$,即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的可逆性相同. 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 且都可逆,则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,于是,$\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{P}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}$,即 $\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$.

定理 4.5 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值相同.

证 由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 知，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，于是

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|&=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}|\\&=|\boldsymbol{P}^{-1}|\,|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{P}|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|,\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相同，从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值相同.

推论 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 相似，则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

证 因为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的 n 个特征值，根据定理 4.5，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

4.3.3 矩阵的对角化

定义 4.8 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，若存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

则称 $\boldsymbol{A}$ **可以相似对角化，简称 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.**

关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化，需考虑以下几个问题：

(1) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是什么？

(2) 若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，则矩阵 $\boldsymbol{P}$ 应如何求出？

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，那么，对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的结构如何？

定理 4.6 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

证 (必要性)若 $\boldsymbol{A}$ 与

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$$

相似，则存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$. 设 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n]$，则由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$ 得

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n]=[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n]\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix},$$

即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i,\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

因 $\boldsymbol{P}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{P}|\neq 0$，得 $\boldsymbol{p}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是非零向量，故 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，且它们线性无关.

(充分性)设 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量，它们所对应的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i(i=1,2,\cdots,n)$.

令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n]$，易知 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}&=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n]=[\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_n]=[\lambda_1\boldsymbol{p}_1,\lambda_2\boldsymbol{p}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{p}_n]\\&=[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n]\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}.\end{aligned}$$

用 $\boldsymbol{P}^{-1}$左乘上式两端得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$,即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似.

推论 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值互不相等,则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

注 当 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程有重根时,就不一定有 n 个线性无关的特征向量,此时,$\boldsymbol{A}$ 不一定能对角化.例如在 4.2 节例 3 中 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程有重根,确实找不到 3 个线性无关的特征向量,因此 4.2 节例 3 中的 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化;而在 4.2 节例 4 中 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程也有重根,但能找到 3 个线性无关的特征向量,因此 4.2 节例 4 中的 $\boldsymbol{A}$ 能对角化.

例 1 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-4 & -6 & 0\\ 3 & 5 & 0\\ x & 6 & -1\end{bmatrix},$$

问 x 取何值时,$\boldsymbol{A}$ 能对角化.

解 由

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+4 & 6 & 0\\ -3 & \lambda-5 & 0\\ -x & -6 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-2),$$

得 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=-1$.

对应于 $\lambda_1=2$,可求得线性无关的特征向量有 1 个,则 $\boldsymbol{A}$ 能对角化的充要条件是对应于 $\lambda_2=\lambda_3=-1$,有两个线性无关的特征向量,即齐次线性方程组$(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 有两个线性无关的解,亦即 $\mathrm{r}(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=1$,由

$$-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 6 & 0\\ -3 & -6 & 0\\ -x & -6 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}3 & 6 & 0\\ 3-x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad 得\ x=3.$$

例 2 已知 $\boldsymbol{p}=[1,1,-1]^{\mathrm{T}}$ 是矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{bmatrix}$$

的一个特征向量.

(1) 求 a,b 及 $\boldsymbol{p}$ 所属的特征值;

(2) $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化?

解 (1) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}$ 得

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases}2-1-2=\lambda,\\ 5+a-3=\lambda,\\ -1+b+2=-\lambda.\end{cases}$$

解得 $\lambda=-1, a=-3, b=0$.

(2) 由

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3,$$

知 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 3 重特征值. 由于

$$-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -2\\ -5 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

有 $\mathrm{r}(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=2$,从而属于 $\lambda=-1$ 的线性无关的向量只有 1 个,所以 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化.

例 3 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{bmatrix},$$

判断 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化,若能,求出相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$.

解 由

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -6 & 0\\ 3 & \lambda+5 & 0\\ 3 & 6 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=-2, \lambda_2=\lambda_3=1$.

对应 $\lambda_1=-2$,解齐次线性方程组 $(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$,得基础解系 $\boldsymbol{p}_1=[-1,1,1]^{\mathrm{T}}$;

对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$,解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$,得基础解系 $\boldsymbol{p}_2=[-2,1,0]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{p}_3=[0,0,1]^{\mathrm{T}}$.

所以 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$,从而 $\boldsymbol{A}$ 可对角化:以 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 作为列向量,得

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad 且 \quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

注 对角矩阵中特征值的排列次序与矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中相应的特征向量的排列次序一致,在本节例 3 中,若以 $\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_3$ 为列向量,作

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}, \quad 则 \quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

习题 4-3

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，证明：$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&1\\3&1&x\\4&0&5\end{bmatrix}$ 可相似对角化，求 x.

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 相似，求 y.

4. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&-1\\a&-2&2\\3&b&-1\end{bmatrix}$，如果 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值 λ_1 对应的一个特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$，求 a,b 及 λ_1.

4.4 实对称矩阵的对角化

一个 n 阶方阵具备什么条件才能对角化？这是一个较复杂的问题. 我们对此不进行一般性的讨论，本节仅讨论当 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵的情形.

定理 4.7 实对称阵的特征值都是实数.

证 假设复数 λ 是对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，复向量 $\boldsymbol{x}$ 为对应的特征向量，即 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{o}$. 用 $\bar{\lambda}$ 表示 λ 的共轭复数，$\bar{\boldsymbol{x}}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 的共轭复向量，则

$$\boldsymbol{A}\,\bar{\boldsymbol{x}}=\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{x}}=\overline{(\boldsymbol{Ax})}=\overline{(\lambda\boldsymbol{x})}=\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{x}}.$$

于是有

$$\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax})=\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\lambda\boldsymbol{x}=\lambda\,\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},$$

及

$$\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=(\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\,\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}x=(\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}x=\bar{\lambda}\,\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

两式相减，有

$$(\lambda-\bar{\lambda})\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0.$$

但 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{o}$，所以 $\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{x}_i x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^2\neq 0$. 故 $\lambda-\bar{\lambda}=0$，即 $\lambda=\bar{\lambda}$，这说明 λ 是实数.

显然，当特征值 λ_i 为实数时，齐次线性方程组

$$(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$$

是实系数线性方程组，由 $|\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$ 知必有实的基础解系，所以对应的特征向量可以取实向量.

定理 4.8 设 λ_1,λ_2 是实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值，$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 是对应的特征向量，若 $\lambda_1\neq\lambda_2$，

则 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 正交.

证 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=\lambda_1\boldsymbol{p}_1$,故 $\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=\lambda_1\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_1$. 又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=\lambda_2\boldsymbol{p}_2$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,所以

$$\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_1=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_1=(\lambda_2\boldsymbol{p}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_1=\lambda_2\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_1,$$

即

$$(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_1=0.$$

但 $\lambda_1\neq\lambda_2$,故 $\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_1=0$,即 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 正交.

推论 若 λ 是实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的 k 重根,则 $\mathrm{r}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n-k$,从而对应于特征值 λ 恰有 k 个线性无关的特征向量.

定理 4.9 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵,则必有正交阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$,其中,$\boldsymbol{\Lambda}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为对角元的对角阵.

根据上述结论,可得到将对称阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化的步骤:

(1) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部互不相等的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$,它们的重数依次为 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ $(k_1+k_2+\cdots+k_s=n)$.

(2) 对每个特征值 λ_i,由齐次线性方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 求出基础解系(特征向量),这样,总共可求得 n 个特征向量.

(3) 将这些特征向量正交化、单位化.

(4) 以这些单位向量作为列向量构成一个正交阵 $\boldsymbol{P}$,有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

注 $\boldsymbol{P}$ 中列向量的排列顺序与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中对角线上的特征值的排列顺序相对应.

例 1 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&2&2\\2&1&4\\2&4&1\end{bmatrix},$$

求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵.

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+2&-2&-2\\-2&\lambda-1&-4\\-2&-4&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+3)^2(\lambda-6),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-3$,$\lambda_3=6$.

对应 $\lambda_1=\lambda_2=-3$,解齐次线性方程组 $(-3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$,得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=[-2,1,0]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[-2,0,1]^{\mathrm{T}}$;

对应 $\lambda_3=6$,解齐次线性方程组 $(6\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$,得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_3=[1,2,2]^{\mathrm{T}}$.

把向量组正交化,有

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=[-2,1,0]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=[-2,0,1]^{\mathrm{T}}-\frac{4}{5}[-2,1,0]^{\mathrm{T}}=\left[-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1\right]^{\mathrm{T}}.$$

再将向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 单位化,得

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\left[-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\left[-\frac{2}{3\sqrt{5}},-\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}}\right]^{\mathrm{T}}.$$

对于 $\boldsymbol{\alpha}_3=[1,2,2]^{\mathrm{T}}$，只需单位化，有

$$\boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]^{\mathrm{T}}.$$

令矩阵

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}.$$

例 2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

解 因 $\boldsymbol{A}$ 对称，故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，即有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$. 于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$，从而 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}$.

由

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1\\ 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=3$. 于是

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda}^n=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3^n\end{bmatrix}.$$

对应 $\lambda_1=1$，由

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad 得\ \boldsymbol{p}_1=[1,1]^{\mathrm{T}};$$

对应 $\lambda_2=3$，由

$$3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad 得\ \boldsymbol{p}_2=[1,-1]^{\mathrm{T}}.$$

并有

$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\quad 再求出\ \boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

于是

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+3^n & 1-3^n\\ 1-3^n & 1+3^n\end{bmatrix}.$$

例 3 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称矩阵，且存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 及 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$ 都是对角阵，证明：$\boldsymbol{AB}$ 是实对称矩阵.

证 依题意，有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n),$$

其中 λ_i,μ_i 分别是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值，则

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP})=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})=\mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1,\cdots,\lambda_n\mu_n),$$

即有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，所以 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$，即 $\boldsymbol{AB}$ 是实对称矩阵.

习题 4-4

求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{bmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{bmatrix}$.

4.5 矩阵的特征值与特征向量的 MATLAB 求解

计算矩阵 A 的特征值和特征向量的 MATLAB 函数是 eig(A)，常用的调用格式有两种：

(1) E=eig(A)：求矩阵 A 的全部特征值，构成向量 E.

(2) [V,D]=eig(A)：返回特征值矩阵 D 和特征向量矩阵 V. 特征值矩阵 D 是以 A 的特征值为对角线元素生成的对角阵. 矩阵 A 的第 i 个特征值所对应的特征向量是矩阵 V 的第 i 列列向量.

例 1 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&2&0\\-4&1&3\end{bmatrix}$ 的特征值及特征向量.

解 在 MATLAB 命令窗口输入以下命令：

(1) 输入矩阵.

```
>> A=[-2 1 1;1 2 0;-4 1 3]
A =
    -2    1    1
     1    2    0
    -4    1    3
```

(2) 输入 E=eig(A)，求特征值.

```
>> E=eig(A)
E =
   -1.3028
    2.3028
    2.0000
```

于是得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1.3028,\lambda_2=2.3028,\lambda_3=2$.

(3) 输入[V,D]=eig(A),求特征向量.

```
>> [V,D] = eig(A)
V =
       0.6914     -0.2783      0.0000
      -0.2094     -0.9193     -0.7071
       0.6914     -0.2783      0.7071
D =
      -1.3028           0           0
            0      2.3028           0
            0           0      2.0000
```

所以特征值 $\lambda_1=-1.3028$ 对应的特征向量为$\begin{bmatrix}0.6914\\-0.2094\\0.6914\end{bmatrix}$;

特征值 $\lambda_2=2.3028$ 对应的特征向量为$\begin{bmatrix}-0.2783\\-0.9193\\-0.2783\end{bmatrix}$;

特征值 $\lambda_3=2$ 对应的特征向量为$\begin{bmatrix}0\\-0.7071\\0.7071\end{bmatrix}$.

习题 4-5

利用 MATLAB 求下列矩阵的特征值和特征向量:

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{bmatrix}$;　　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&1&0\\-1&1&1\end{bmatrix}$.

总 习 题 4

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}=[1,2,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=[1,1,3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}=[0,1,2]^{\mathrm{T}}$.

(1) 求 $\|\boldsymbol{\alpha}\|,\|\boldsymbol{\beta}\|,\|\boldsymbol{\gamma}\|$ 及 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})$;

(2) 问 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 及 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 是否正交.

2. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,2,3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,1,4,-1]^{\mathrm{T}}$,求与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 都正交的向量.

3. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,非零向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均正交,试证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-3&3\\3&a&3\\6&-6&b\end{bmatrix}$有特征值 $\lambda_1=-2,\lambda_2=4$,试求参数 a,b 的值.

5. 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1，−2，3，则 $(2\boldsymbol{A})^{-1}$ 的特征值是________.

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&b\end{bmatrix},$$

求 a,b 的值，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

7. 计算向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积：

(1) $\boldsymbol{\alpha}=[1,-2,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=[2,2,-1]^{\mathrm{T}}$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{4},-1\right]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},-2,\sqrt{2},\frac{1}{2}\right]^{\mathrm{T}}$.

8. 将下列线性无关的向量组正交化：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,2,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,-5,3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[3,2,8,-7]^{\mathrm{T}}$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-2,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,0,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[5,-3,-7]^{\mathrm{T}}$.

9. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{o},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_3$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

10. 判断下面的矩阵是否为正交阵：

(1) $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\frac{1}{9}&-\frac{8}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{8}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{4}{9}&-\frac{4}{9}&\frac{7}{9}\end{bmatrix}$.

11. 求正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{bmatrix}$.

12. 若 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{6}$，计算：

(1) $\left|\boldsymbol{A}-\frac{1}{2}\boldsymbol{I}\right|$；　　(2) $\left|\boldsymbol{A}-\frac{1}{3}\boldsymbol{I}\right|$；

(3) $|\boldsymbol{A}^{-1}-6\boldsymbol{I}|$；　　(4) $|\boldsymbol{B}^{-1}-3\boldsymbol{I}|$.

13. 设三阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1，2，3，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 1，2 的特征向量分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[-1,-1,1]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=[1,-2,1]^{\mathrm{T}}.$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 3 的特征向量；

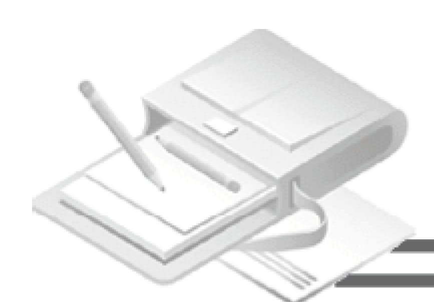
(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

14. 已知向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}\text{是 }\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$$

的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量,试求 k.

15. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵,即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,试证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只有 1 和 0.



第 5 章

二　次　型

在解析几何中,当有心二次曲线的中心与坐标原点重合时,其一般方程是 $ax^2+2axy+cy^2=1$. 为了便于研究这个二次曲线的几何性质,可以通过适当的坐标变换

$$\begin{cases} x=u\cos\theta-v\sin\theta, \\ y=u\sin\theta+v\cos\theta, \end{cases}$$

把方程化为不含 x,y 混合项的标准方程:

$$mu^2+nv^2=1.$$

例如,方程 $13x^2+10xy+13y^2=72$. 通过坐标旋转变换

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}u-\dfrac{\sqrt{2}}{2}v, \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}u+\dfrac{\sqrt{2}}{2}v, \end{cases}$$

则得此方程在新的 u,v 坐标系下的方程: $\dfrac{u^2}{4}+\dfrac{v^2}{9}=1$.

上述问题从几何上看,就是通过坐标轴旋转,消去交叉项,使之成为标准方程.

本章将把这类问题一般化,讨论几个变量的二次多项式的化简问题.

5.1　基本概念

5.1.1　二次型的概念

定义 5.1　含有 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+ a_{33}x_3^2+\cdots+2a_{3n}x_3x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2, \tag{5.1}$$

也可记为

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_{ij}x_ix_j,$$

称为 **n 元二次型**,简称二次型. 当 a_{ij} 为复数时, f 称为**复二次型**;当 a_{ij} 为实数时, f 称为**实二次型**.

本章只讨论实二次型,以下所提的二次型均为实二次型. 例如

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3,$$
$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_1x_2+x_2x_3$$

都是二次型.

5.1.2 二次型的矩阵表示

在(5.1)式中，取 $a_{ij}=a_{ji}$，由 $x_ix_j=x_jx_i\ (i<j)$，则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$，于是(5.1)式可改写为

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+\\
&\quad\ a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2\\
&=x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)+\\
&\quad\ x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n)+\cdots+\\
&\quad\ x_n(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n)\\
&=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\\
&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},
\end{aligned}
$$

其中

$$
\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}.
$$

称 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为二次型的**矩阵形式**，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为该二次型 f 的**矩阵**，二次型 f 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**二次型**. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型 f 的**秩**.

注 (1) 二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 总是对称矩阵，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

(2) 二次型 f 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相互唯一确定，即：

若 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$，且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例 1 二次型 $x_1^2-x_2^2-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 的矩阵为

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix};
$$

反之，上述对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所对应的二次型为

$$
\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=x_1^2-x_2^2-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3.
$$

例 2 求二次型 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-2xy+2\sqrt{2}xz$ 的秩.

解 先求二次型的矩阵. 由

$$
f(x,y,z)=(x,y,z)\begin{bmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2}\\ -1 & 2 & 0\\ \sqrt{2} & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix},
$$

所以

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&\sqrt{2}\\-1&2&0\\\sqrt{2}&0&3\end{bmatrix}.$$

对 A 作初等变换：

$$A\to\begin{bmatrix}1&-1&\sqrt{2}\\0&1&\sqrt{2}\\0&\sqrt{2}&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&\sqrt{2}\\0&1&\sqrt{2}\\0&0&-1\end{bmatrix},$$

即 $\mathrm{r}(A)=3$，所以二次型 f 的秩为 3.

5.1.3 矩阵合同

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是两组变量，关系式

$$\begin{cases}x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n,\\x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n,\\\qquad\vdots\\x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n\end{cases}$$

称为由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的一个**线性变换**，矩阵

$$C=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{bmatrix}$$

称为**线性变换矩阵**，记作 $x=Cy$. 当 C 可逆时，称该线性变换为**可逆线性变换**.

对于二次型 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$，作可逆线性变换 $x=Cy$，可将其转化为

$$f=x^{\mathrm{T}}Ax=(Cy)^{\mathrm{T}}A(Cy)=y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)y.$$

而 $(C^{\mathrm{T}}AC)^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}AC$，记 $B=C^{\mathrm{T}}AC$，则 $f=y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)y=y^{\mathrm{T}}By$ 仍是关于 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的二次型.

关于 A 和 B 的关系，给出如下的定义.

定义 5.2 对于 n 阶方阵 A 和 B，若存在 n 阶可逆矩阵 C，使得 $C^{\mathrm{T}}AC=B$，则称矩阵 A 合同于矩阵 B，或称 A 与 B 合同.

合同矩阵具有如下的基本性质：

(1) **自反性** 任意方阵 A，A 合同于 A，因为 $I^{\mathrm{T}}AI=A$.

(2) **自称性** 若 A 合同于 B，则 B 合同于 A.

因为若 $B=C^{\mathrm{T}}AC$，则 $A=(C^{\mathrm{T}})^{-1}BC^{-1}=(C^{-1})^{\mathrm{T}}BC^{-1}$.

(3) **传递性** 若 A 合同于 B，B 合同于 C，则 A 合同于 C.

因为若 $B=P_1^{\mathrm{T}}AP_1$，$C=P_2^{\mathrm{T}}BP_2$，则

$$C=P_2^{\mathrm{T}}(P_1^{\mathrm{T}}AP_1)P_2=(P_1P_2)^{\mathrm{T}}A(P_1P_2).$$

例 3 设二次型 $f=x_1^2-x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3$，作可逆线性变换

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&1&2\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix},$$

求出新的二次型.

解 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，所以新的二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&1&2\\0&0&-1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&1&2\\0&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&2&-5\\0&-5&-12\end{bmatrix},$$

所以新的二次型为 $f=y_1^2+2y_2^2-12y_3^2+4y_1y_2-10y_2y_3$.

习题 5-1

1. 判断下列哪些是二次型：

(1) $f(x,y,z)=2x^2+y^2+xz-yz$；

(2) $f(x,y)=x^2+y^2+5x$；

(3) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_4$；

(4) $f(x,y,z)=2x^2-y^2+2xy+yz+z^2$.

2. 写出下列二次型的矩阵形式：

(1) $f(x,y,z)=x^2-2y^2+2xy+4xz+z^2-2yz$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2-x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_4$.

3. 写出对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-3\\-1&0&1\\-3&1&-1\end{bmatrix}$ 所对应的二次型.

4. 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&4&2\\2&2&3\\6&5&3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ 的对称矩阵.

5. 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&0\\1&2&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ 的秩.

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1{}^2+x_2{}^2-4x_1x_2-4x_2x_3$，分别作下列可逆线性变换，求出新的二次型：

(1) $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{y}$；　　(2) $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1/2\end{bmatrix}\boldsymbol{y}$.

7. 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，则(　　).

A. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$　　B. $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$　　C. $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$　　D. $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$

5.2 二次型的标准形

定义 5.3 如果可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 将二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为只含平方项的标准二次型

$$b_1y_1^2+b_2y_2^2+\cdots+b_ny_n^2=\sum_{i=1}^{n}b_iy_i^2, \tag{5.2}$$

则称(5.2)式为二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的**标准形**.

由实对称矩阵的对角化方法知,可取 $\boldsymbol{C}$ 为正交变换矩阵,则二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y},$$

若 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 为对角矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n\end{bmatrix},$$

则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 就可化为标准形.

化二次型为标准形有三种方法:配方法、初等变换法、正交变换法.

5.2.1 用配方法化二次型为标准形

定理 5.1 对任意的二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,一定存在可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$,使得二次型化为标准形.

证 略.

推论 任意给定一个实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$,一定存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 为对角矩阵.

对一般的二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,利用拉格朗日配方法的步骤:

(1) 若二次型含有 x_i 的平方项,则先集中含有 x_i 的乘积项,然后配方,再对其余的变量重复上述过程直到所有变量都配成平方项.

(2) 若二次型中不含平方项,但是 $a_{ij}\neq 0(i\neq j)$,则先作线性变换:

$$\begin{cases}x_i=y_i+y_j,\\ x_j=y_i-y_j, \quad k=1,2,\cdots,n \text{ 且 } k\neq i,j.\\ x_k=y_k,\end{cases}$$

化二次型为含有平方项的二次型,再按步骤(1)的方法配方.

例 1 化二次型 $f=x_1^2+2x_2^2-x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$ 为标准形,并写出所作的线性变换.

解 因含有平方项,可根据配方法的步骤(1)求解.

先集中含有 x_1 的乘积项,有

$$f=x_1^2+4x_1(x_2-x_3)+2x_2^2-x_3^2-4x_2x_3.$$

再对 x_1 进行配方,即

$$\begin{aligned}f&=x_1^2+4x_1(x_2-x_3)+(2x_2-2x_3)^2-(2x_2-2x_3)^2+2x_2^2-x_3^2-4x_2x_3\\&=(x_1+2x_2-2x_3)^2-2x_2^2+4x_2x_3-5x_3^2.\end{aligned}$$

然后重复上述步骤，依次配方得

$$f=(x_1+2x_2-2x_3)^2-2(x_2-x_3)^2-3x_3^2.$$

$$令\begin{cases}y_1=x_1+2x_2-2x_3,\\y_2=x_2-x_3,\\y_3=x_3,\end{cases}\quad 即\quad\begin{cases}x_1=y_1-2y_2,\\x_2=y_2+y_3,\\x_3=y_3.\end{cases}$$

所以经过线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，二次型 f 化为了标准形 $y_1^2-2y_2^2-3y_3^2$，因为

$$|\boldsymbol{C}|=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=1\neq 0,$$

所以 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 是可逆线性变换.

例 2 化二次型 $f=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 为标准形，并写出所作的线性变换.

解 由于 f 中不含平方项，故按拉格朗日配方法的步骤(2)求解.

先作线性变换

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2,\\x_2=y_1-y_2,\\x_3=y_3,\end{cases}\quad 即\quad\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix},$$

代入可得

$$\begin{aligned}f&=-4(y_1+y_2)(y_1-y_2)+2(y_1+y_2)y_3+2(y_1-y_2)y_3\\&=-4y_1^2+4y_1y_3+4y_2^2.\end{aligned}$$

再配方，得

$$f=-4(y_1-(1/2)y_3)^2+4y_2^2+y_3^2.$$

$$令\begin{cases}z_1=y_1-(1/2)y_3,\\z_2=y_2,\\z_3=y_3,\end{cases}\quad 则\begin{cases}y_1=z_1+(1/2)z_3,\\y_2=z_2,\\y_3=z_3,\end{cases}$$

即

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1/2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix},$$

则二次型就化为标准形 $f=-4z_1^2+4z_2^2+z_3^2$，其中

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1/2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1/2\\1&-1&1/2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}.$$

因为

$$\begin{vmatrix}1&1&1/2\\1&-1&1/2\\0&0&1\end{vmatrix}=-2\neq 0,$$

所以所作的线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$ 是可逆的线性变换.

一般地，对于任意二次型都可用本节中两例的方法找到可逆线性变换，把二次型化为标准形.

5.2.2 用初等变换化二次型为标准形

对于二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，由定理 5.2 的推论可知，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 为对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$.

而可逆矩阵可以表示成一系列初等矩阵的乘积，即

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s.$$

因此，可得如下的定理.

定理 5.2 对任意实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在一系列初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$，使

$$\boldsymbol{P}_s^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s=\boldsymbol{\Lambda}.$$

由此可见，对 $2n\times n$ 矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$ 施以相应的初等列变换，再进行同样的初等行变换，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 变为对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，而单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 就变为所求的可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$. 这样，我们就得到利用矩阵的初等变换化二次型为标准形的方法，即初等变换法.

例 3 求可逆线性变换将二次型 $f=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$ 化为标准形.

解 此二次型对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&1\end{bmatrix}$，利用初等变换，有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-c_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&0\\1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\\1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[c_3-c_2]{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\\1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix},$$

因此，

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix},\quad |\boldsymbol{C}|=1\neq0.$$

令

$$\begin{cases}x_1=z_1-z_2,\\x_2=z_2-z_3,\\x_3=z_3,\end{cases}$$

代入原二次型可得标准形 $f=z_1^2+z_2^2-z_3^2$.

5.2.3 用正交变换化二次型为标准形

要使二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 变成标准形 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$，即要使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 成为对角矩阵，即

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$=b_1y_1^2+b_2y_2^2+\cdots+b_ny_n^2.$$

根据第 4 章实对称矩阵对角化定理可知，对于对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，必有正交矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为对角元素的对角矩阵.

由此可得以下定理.

定理 5.3 任给二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，总存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，使得 f 化为标准形：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

用正交变换化二次型为标准形的基本步骤：

(1) 求出二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；

(3) 求出对应于各特征值的线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$；

(4) 将特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 规范正交化得到 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$；

(5) 令 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)$，作正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，可得 f 的标准形

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

例 4 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+6x_2{}^2+2x_3{}^2+8x_1x_3$，求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，将该二次型化为标准形.

解 (1) 求出二次型的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -4 \\ 0 & \lambda-6 & 0 \\ -4 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2)=0$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=-2$.

(3) 求特征向量.

将 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$，得

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

进而得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix};$$

将 $\lambda_3=-2$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$，得

$$\begin{bmatrix}-4&0&-4\\0&-8&0\\-4&0&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

进而得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}.$$

(4) 将特征向量规范化.

正交化：因 $(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_3)=(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=0$，可知 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 已正交；

单位化：$\boldsymbol{\eta}_1=\dfrac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\dfrac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_3=\dfrac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$.

(5) 于是所求正交变换为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}.$$

在此变换下原二次型化为标准形 $f=6y_1^2+6y_2^2-2y_3^2$.

例 5 将二次曲面方程 $2x^2+5y^2+5z^2+4xy-4yz-8xz=1$ 化为标准方程，并判断曲面类型.

解 (1) 求出二次型的矩阵.

$$f(x,y,z)=2x^2+5y^2+5z^2+4xy-4yz-8xz=(x,y,z)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}.$$

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

令 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=0$,即

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -4 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & -4 & 9-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

$$=0,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=10,\lambda_2=\lambda_3=1$.

(3) 求特征向量.

当 $\lambda_1=10$ 时,解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$,可得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时,解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$,可得两个线性无关的特征向量:

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}.$$

(4) 将特征向量规范化.

将 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 正交化可得

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\xi}_3-\frac{(\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix};$$

再将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 单位化可得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix}.$$

(5) 于是所求正交变换为

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}.$$

在此变换下原二次型化为标准形

$$f(x',y',z')=10x'^2+y'^2+z'^2,$$

所以曲面的标准方程为 $10x'^2+y'^2+z'^2=1$，进而可以判断该曲面为旋转椭球面.

习题 5-2

1. 用配方法将下列二次型化为标准形，并写出所用变换的矩阵.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

2. 用初等变换将下列二次型化为标准形，并写出所用变换的矩阵：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3$.

3. 用正交变换将下列二次型化为标准形，并写出正交变换：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

4. 已知某二次曲面的方程为 $2x^2+3y^2+3z^2-2xy-2xz=1$，请用正交变换写出其标准方程.

5.3 惯性定理与规范形

对于 5.2 节的例 2，通过配方法将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 化为标准形 $f(z_1,z_2,z_3)=-4z_1^2+4z_2^2+z_3^2$. 如再作变换

$$\begin{cases}u=2z_1,\\ v=2z_2,\\ w=z_3,\end{cases}$$

则得新标准形 $f(u,v,w)=-u^2+v^2+w^2$.

由此可知，二次型的标准形不是唯一的.

通过 5.2 节可知，一个二次型既可以通过配方法也可以通过初等变换、正交变换化为标准形，显然，所得标准形一般来说不是唯一的.

但比较各个不同的标准形会发现，其中所含有系数不为 0 的平方项的个数是确定的，等于二次型的秩，且正平方项项数和负平方项项数也是确定的，即有下面的定理.

定理 5.4 对于秩为 r 的 n 元二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，不论用何种可逆线性变换化为标准形，其中正平方项的项数 p 与负平方项的项数 q 都是唯一确定的，且 $p+q=r$. 即若设秩为 r 的 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$，经过两个不同的可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}$，分别化为

$$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ry_r^2\,(k_i\neq0) \quad 和 \quad f=\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\cdots+\lambda_rz_r^2\,(\lambda_i\neq0),$$

则 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 中正数的个数相等.

为此特给出下面的定义.

定义 5.4 在二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的标准形中，正平方项的项数 p 称为二次型的**正惯性指**

数;负平方项的项数 $q=r-p$ 称为二次型的**负惯性指数**;正负惯性指数的差 $p-q=2p-r$ 称为**符号差**.

推论 对于任何二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,都存在可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$,使得

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2,$$

其中,p,q 分别为 f 的正负惯性指数,$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2$ 称为二次型 f 的**规范形**.显然,它是唯一的.

例 1 化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 为规范形,并求其正负惯性指数.

解 由 5.2 节的例 2 可知 f 经线性变换

$$\begin{cases}x_1=z_1+z_2+(1/2)z_3,\\x_2=z_1-z_2+(1/2)z_3,\\x_3=z_3\end{cases}$$

化为标准形 $f(z_1,z_2,z_3)=-4z_1^2+4z_2^2+z_3^2$.再作变换

$$\begin{cases}u=2z_1,\\v=2z_2,\\w=z_3,\end{cases}$$

则可得 f 的规范形 $f(u,v,w)=-u^2+v^2+w^2$,其中正惯性指数为 2,负惯性指数为 1.

习题 5-3

1. $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$,则其规范形为________.

2. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+4x_1x_2-4x_2x_3$ 的正负惯性指数分别是________和________.

3. 将下列二次型化为规范形,并指出其正负惯性指数及秩:

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3$;

(3) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_4+2x_1x_4$.

5.4 正定二次型及正定矩阵

5.4.1 正(负)定二次型的概念

定义 5.5 具有对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

(1) 如果对于任意的非零向量 $\boldsymbol{x}$,都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$(或$<0$)成立,那么称 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为**正定(或负定)二次型**,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**正定(或负定)矩阵**.

(2) 如果对于任意的非零向量 $\boldsymbol{x}$,都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geqslant 0$(或$\leqslant 0$)成立,并且存在某非零向量 $\boldsymbol{x}_0$,使 $\boldsymbol{x}_0{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=0$,那么称 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为**半正定(或半负定)二次型**,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**半正定(或半负定)矩阵**.

(3) 如果对于某向量 $\boldsymbol{x}_1$,有 $\boldsymbol{x}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1>0$,而对另一向量 $\boldsymbol{x}_2$,有 $\boldsymbol{x}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2<0$,则称该二次型

为不定二次型，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为不定矩阵.

例 1 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+6x_3^2$，当 x_1,x_2,x_3 非零时，显然 $f>0$，所以这个二次型为正定二次型，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{bmatrix}$$

为正定矩阵.

例 2 二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2$，将其改写成 $f(x_1,x_2)=(x_1-x_2)^2\geqslant0$，当 $x_1=x_2$ 时，$f(x_1,x_2)=0$，所以这个二次型为正半定二次型，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$$

为正半定矩阵.

例 3 对于二次型 $f(x_1,x_2)=-x_1^2+3x_2^2$，因为 $f(1,1)=2>0$，$f(2,1)=-1<0$，所以该二次型为不定二次型，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&3\end{bmatrix}$$

为不定矩阵.

5.4.2 正定矩阵的判别法

定理 5.5 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正.

证 (必要性)假设 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_i$ 为对应于 λ_i 的特征向量，则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i$，则 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i$. 因 $\boldsymbol{\alpha}_i\neq\boldsymbol{o}$，$\boldsymbol{A}$ 正定，可知 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i>0$，所以 $\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i>0$，故 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$.

(充分性)假设 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}.$$

对于任意非零向量 $\boldsymbol{x}$，有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}x=(\boldsymbol{P}^{-1}x)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x})$. 设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{y}$ 为非零向量，这时 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2>0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

推论 1 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵的充分必要条件是其正惯性指数 $p=n$.

推论 2 实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定的充要条件是它的标准形的系数全为正.

推论 3 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 负定的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为负.

定理 5.6 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件是：存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{I}$ 合同.

证 (必要性)由定理 5.5 可知，$\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，则存在正交矩阵

$\boldsymbol{P}$,使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

设

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\end{bmatrix},$$

则$(\boldsymbol{PQ})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{APQ}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda Q}=\boldsymbol{I}$.设$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PQ}$,则$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{I}$,即$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{I}$合同.

(充分性)若$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{I}$合同,则存在可逆矩阵$\boldsymbol{C}$,使$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{IC}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$,于是对于非零向量$\boldsymbol{x}$,有$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Cx}=(\boldsymbol{Cx})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Cx})$.因$\boldsymbol{C}$可逆,$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{o}$,故$\boldsymbol{Cx}\neq\boldsymbol{o}$,则$(\boldsymbol{Cx})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Cx})>0$,所以矩阵$\boldsymbol{A}$为正定矩阵.

推论 若矩阵$\boldsymbol{A}$为正定矩阵,则$|\boldsymbol{A}|>0$.

例 4 判断矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 5 & 0\\ 2 & 0 & 7\end{bmatrix}$$

是否为正定矩阵.

解 由

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-6 & 2 & -2\\ 2 & \lambda-5 & 0\\ -2 & 0 & \lambda-7\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-9),$$

解得矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=3,\lambda_2=6,\lambda_3=9$.由定理5.5可知矩阵$\boldsymbol{A}$为正定矩阵.

为了叙述下一个正定矩阵的判别法,我们引进如下的定义.

定义 5.6 n阶矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的前k行前k列元素组成的行列式

$$|\boldsymbol{A}_k|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix},\qquad k=1,2,\cdots,n$$

称为$\boldsymbol{A}$的k**阶顺序主子式**.

定理 5.7 对称矩阵$\boldsymbol{A}$为正定矩阵的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$的所有顺序主子式全大于0,即$|\boldsymbol{A}_k|>0(k=1,2,\cdots,n)$.

证 略.

注 对于负定矩阵、半正定与半负定矩阵也有类似于上述正定矩阵的结论:

(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为负定矩阵的充分必要条件是 $(-1)^k|\boldsymbol{A}_k|>0(k=1,2,\cdots,n)$.

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为半正定(半负定)矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式大于(小于)或等于 0.

例 5 判别二次型 $f=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy$ 的正定性.

解 二次型 f 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-5 & 2 & 0\\ 2 & -6 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix},$$

且 $\boldsymbol{A}$ 的各阶主子式分别为

$$a_{11}=-5<0,\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=26>0,\quad |\boldsymbol{A}|=-104<0,$$

根据定理 5.7 的注(1)可知二次型 f 是负定的.

例 6 讨论 t 取何值时,二次型 $f=2x^2+2y^2+z^2+2txy+2xz-2yz$ 为正定二次型.

解 二次型 f 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & t & 1\\ t & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix},$$

经计算可得

$$a_{11}=2>0,\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=4-t^2,\quad |\boldsymbol{A}|=-t(2+t).$$

要使二次型 f 为正定的,只需 $\begin{cases}4-t^2>0,\\ -t(2+t)>0,\end{cases}$ 解得 $-2<t<0$. 故当 $-2<t<0$ 时,二次型 f 是正定二次型.

习题 5-4

1. 判别下列二次型的正定性:

(1) $f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$;

(2) $f=x_1^2+x_2^2+14x_3^2+7x_4^2+6x_1x_3+4x_1x_4-4x_2x_3$.

2. 求 a 的值,使二次型正定:

(1) $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$;

(2) $f=5x_1^2+x_2^2+ax_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$.

3. 已知

$$\begin{bmatrix}2-a & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a+3\end{bmatrix}$$

是正定矩阵,求 a 的值.

4. 设对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,证明:存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$.

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 m,n 阶正定矩阵，试判定分块矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$是否为正定矩阵.

5.5 二次型的 MATLAB 求解

对于二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，通过 MATLAB 求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，用正交变换化二次型为标准形.

例 1 化二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$ 为标准形.

解 易知二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

在 MATLAB 命令窗口输入以下命令：

(1) 输入二次型的矩阵.

```
>> A=[0 1 1 -1;1 0 -1 1;1 -1 0 1;-1 1 1 0]
A =
     0     1     1    -1
     1     0    -1     1
     1    -1     0     1
    -1     1     1     0
```

(2) 求二次型矩阵的特征值.

```
>> [P,V]=eig(A)
P =
   -0.5000     0.2887    0.7887     0.2113
    0.5000    -0.2887    0.2113     0.7887
    0.5000    -0.2887    0.5774    -0.5774
   -0.5000    -0.8660         0          0
V =
   -3.0000          0         0          0
         0     1.0000         0          0
         0          0    1.0000          0
         0          0         0     1.0000
```

P 就是所求的正交矩阵，令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，化简后得二次型为：

$$f(y_1,y_2,y_3,y_4)=-3y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2.$$

例 2 判定二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-5x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3$ 的正定性.

解 在 MATLAB 命令窗口输入以下命令：

(1) 输入二次型的矩阵.

```
>> A=[-5 2 2;2 -6 0;2 0 -4]
A =
    -5     2     2
```

```
    2    -6    0
    2     0   -4
```

(2) 求二次型矩阵的特征值.

```
>> d = eig(A)
d =
   -8.0000
   -5.0000
   -2.0000
```

(3) 因为 A 的特征值全为负数,所以该二次型为负定的.

习题 5-5

1. 利用 MATLAB 将下列二次型化为标准形.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$.

2. 利用 MATLAB 判别下列二次型的正定性.

(1) $f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$;

(2) $f=-x_1^2-5x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$.

总 习 题 5

1. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+mx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2,求 m 的值.

2. 已知 $(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$ 是二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量,求正交变换化二次型为标准形.

3. 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(-2x_1+x_2+x_3)^2+(x_1-2x_2+x_3)^2+(x_1+x_2-2x_3)^2$ 的标准形及相应的可逆线性变换.

4. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&4&a\\2&a&4\end{bmatrix},$$

二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化为标准形 $f=9y_3^2$,求所作的正交变换.

5. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 经过正交变换化为标准形 $f=y_2^2+4y_3^2$,求参数 a,b 及所用的正交变换矩阵.

6. $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵,且满足 $\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{I}$,二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经正交变换可化为标准形,求此标准形的表达式.

7. 试问,三元方程 $3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3-x_1-x_2-x_3=0$ 在三维空间中代表何种几何曲面.

8. 证明:二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时的最大值为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.

9. 判别二次型 $f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-6x_2x_4-12x_3x_4$ 的正定性.

10. 考虑二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+(1-a)x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3$，问 a 为何值时，f 为正定二次型.

11. 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$，试证 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶的正定矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 实阵，试证 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 正定的充分必要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n$.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶半正定矩阵，试判定 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是否为正定矩阵.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，试证：当 $\lambda>0$ 时，$\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

15. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化为 $f=y_2^2+2y_3^2$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$ 都是三维列向量. $\boldsymbol{P}$ 为三阶正交矩阵，试求常数 a,b.

第 6 章

线性空间与线性变换

如果一个包含 0,1 在内的数集 F 中任意两个数的四则运算仍是 F 中的数,则称 F 为一个**数域**.

在第 2 章及第 3 章我们引进了数域 F 上的向量空间与矩阵的概念,并阐明它们在代数学中的地位;F 上 m 维向量空间 F^m 是一个最初等的代数系统,而 F 上的 $m\times n$ 矩阵则代表从 F^n 到 F^m 的一个保持加法、数乘运算的映射.这样,我们已经从经典代数学向近代的代数学过渡中迈出了关键性的一步.但是又要看到这个进步只是从研究单个的数拓展到研究一组数.因此,关于向量空间和矩阵的认识还需要从理论上再提高一步,实现从具体到抽象的又一次飞跃.可以把关于向量空间中非本质的东西抛弃,只把最根本的运算法则保留下来,这样,就形成了本章的核心概念,也就是线性代数这门学科的基本研究对象:数域 F 的抽象线性空间.

6.1 线性空间

6.1.1 线性空间的定义及性质

定义 6.1 设 V 是一个非空集合,F 是一数域.如果存在一种规则:对于 V 中任意两个元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$,总有 V 中一个确定的元素 $\boldsymbol{\gamma}$ 与之对应,$\boldsymbol{\gamma}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和,记为 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$,则把这种规则叫做 V 的加法运算.另有一种规则:对于 F 中的任意数 k 及 V 中任意元素 $\boldsymbol{\alpha}$,总有 V 中一个确定的元素 $\boldsymbol{\sigma}$ 与之对应,$\boldsymbol{\sigma}$ 叫做 k 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数乘,记为 $\boldsymbol{\sigma}=k\boldsymbol{\alpha}$,则把这种规则叫做 V 对于 F 的数乘运算.而且,以上两种运算还具有如下的性质:

对于任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$ 及 $k,l\in F$,有:

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(3) V 中存在零元素 $\boldsymbol{o}$,对于任何 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,恒有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{\alpha}$;

(4) 对于任何 $\boldsymbol{\alpha}\in \boldsymbol{V}$,都有 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素 $\boldsymbol{\beta}\in V$,使 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{o}$;

(5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$;(式中 kl 是通常的数的乘法)

(7) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$;(式中 $k+l$ 是通常的数的加法)

(8) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

则称 V 为数域 F 上的一个**线性空间**,也称向量空间,V 中元素称为向量.

V 中所定义的加法及数乘运算统称为**线性运算**,其中数乘又称数量乘法.在不致产生混

淆时,将数域 F 上的线性空间简称为线性空间.

需要指出,不管 V 的元素如何,当 F 为实数域 $\mathbf{R}$ 时,则称 V 为实线性空间;当 F 为复数域 $\mathbf{C}$ 时,就称 V 为复线性空间.

线性空间 $V=\{0\}$ 称为零空间.

例 1 任何数域 F(作为集合),对于通常的数的加法与乘法(作为数乘)运算,都构成此数域 F 上的线性空间.

例 2 以数域 F 上的数为系数的多项式称为数域 F 上的多项式. 数域 F 上的、以 x 为变量的全体多项式的集合记为 $F[x]$;次数小于 n 的全体多项式的集合记为 $F[x]_n$.

可以证明,$F[x]_n$ 对于通常的多项式加法及多项式数乘运算构成数域 F 上的线性空间.

对于多项式 $f(x),g(x)\in F[x]_n$,设:

$$f(x)=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0,$$

$$g(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0,$$

这里 $a_i,b_i\in F,i=0,1,2,\cdots,n-1$,于是:

$$f(x)+g(x)=(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+(a_{n-2}+b_{n-2})x^{n-2}+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\in F[x]_n,$$

对于任何 $k\in F$,有 $kf(x)=ka_{n-1}x^{n-1}+ka_{n-2}x^{n-2}+\cdots+ka_1+ka_0\in F[x]_n$. 易证明线性空间定义中的 8 条性质都成立,因此 $F[x]_n$ 是 F 上的线性空间.

类似可证 $F[x]$ 对于通常的多项式加法及数乘运算也构成数域 F 上的线性空间.

例 3 数域 F 上的 n 维列(或行)数组向量的全体所构成集合记为 F^n,它对于数组向量加法、数乘运算构成 F 上的线性空间.

例 4 数域 F 上的 $m\times n$ 矩阵的全体构成的集合记为 $F^{m\times n}$,它对于矩阵加法、数乘运算构成数域 F 上的线性空间.

例 5 定义在 $[a,b]$ 上的实函数全体的集合 V,对于函数加法、数乘运算构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

例 6 常系数二阶齐次线性微分方程

$$y''-3y'+2y=0$$

的解的集合 D,对于函数加法及数与函数的乘法有:若 $y_1,y_2\in D$,则 $y_1+y_2\in D$,当 $k\in\mathbf{R}$ 时,则 $ky_1\in D$,即 D 关于这两种运算是封闭的,且满足定义 6.1 中的 8 条性质,故 D 构成了 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

定理 6.1 设 V 是数域 F 上的线性空间,则:

(1) V 中零元素唯一;

(2) V 中任一元素的负元素唯一;$\forall\alpha\in V$,用 $-\boldsymbol{\alpha}$ 表示 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素;

(3) $k\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}$;特别有 $0\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{o}$,$(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$;

(4) 如果 $k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{o}$,那么 $k=0$ 或 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{o}$.

证 这里仅证明(2),其余的证明留给读者去完成.

假设 $\boldsymbol{\alpha}$ 有两个负元素 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$,则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{o}$,$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{o}$,从而

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{\beta}+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{o}+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}.$$

6.1.2 线性空间的子空间

在通常的三维几何空间中，考虑过原点的一条直线或一个平面. 不难验证这条直线或这个平面上的所有向量对于向量加法及数乘运算，分别形成一个一维和二维的线性空间. 这就是说，它们一方面都是三维几何空间的一部分，一方面它们自身对于原来的运算也都构成一个线性空间. 针对这种现象，引入下面定义.

定义 6.2 设 V_1 是数域 F 上的线性空间 V 的一个非空子集，且对 V 中已有的线性运算满足以下条件：

(1) 对任意的 $x,y\in V_1$，有 $x+y\in V_1$；

(2) 对任意的 $x\in V_1,k\in F$，有 $kx\in V_1$.

则称 V_1 为 V 的**线性子空间或子空间.**

值得指出，线性子空间 V_1 也是线性空间. 这是因为 V_1 为 V 的子集合，所以 V_1 中的向量不仅对线性空间 V 已定义的线性运算封闭，而且还满足相应的 8 条运算律.

容易看出，每个非零线性空间至少有两个子空间，一个是它自身，另一个是仅由零向量所构成的子集合，称后者为**零子空间**. 它们称为平凡子空间.

例 7 $\mathbf{R}^{2\times 3}$ 的下列子集是否构成子空间？为什么？

(1) $W_1=\left\{\begin{bmatrix}1 & b & 0\\0 & c & d\end{bmatrix}\middle| b,c,d\in\mathbf{R}\right\}$；

(2) $W_2=\left\{\begin{bmatrix}a & b & 0\\0 & 0 & c\end{bmatrix}\middle| a+b+c=0,a,b,c\in\mathbf{R}\right\}$.

解 (1) 不构成子空间.

因为对

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & b & 0\\0 & c & d\end{bmatrix}\in W_1,\qquad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 2b & 0\\0 & 2c & 2d\end{bmatrix}\notin W_1,$$

故 W_1 不构成子空间.

(2) 若

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & 0\\0 & 0 & c_1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_2 & b_2 & 0\\0 & 0 & c_2\end{bmatrix}\in W_2,$$

有 $a_1+b_1+c_1=0,a_2+b_2+c_2=0$，于是

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_1+a_2 & b_1+b_2 & 0\\0 & 0 & c_1+c_2\end{bmatrix}$$

满足 $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)=0$，即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\in W_2$. 又对于 $k\in\mathbf{R}$，有

$$k\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}ka_1 & kb_1 & 0\\0 & 0 & kc_1\end{bmatrix}$$

且 $ka_1+kb_1+kc_1=0$，所以 $k\boldsymbol{A}\in W_2$，所以 W_2 是 $\mathbf{R}^{2\times 3}$ 的子空间.

例 8 设线性空间 $\mathbf{R}^3$ 中 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,0),\boldsymbol{\beta}=(0,1,0)$，试证明它们的线性组合全体 $V_1=\{k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}|k_1,k_2\in\mathbf{R}\}$ 构成 $\mathbf{R}^3$ 的子空间.

证 易得 $V_1\subset\mathbf{R}^3$.

任取 $\boldsymbol{\gamma}_1=k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}\in V_1,\boldsymbol{\gamma}_2=l_1\boldsymbol{\alpha}+l_2\boldsymbol{\beta}\in V_1$，都有 $\boldsymbol{\gamma}_1+\boldsymbol{\gamma}_2\in V_1,\lambda\gamma_1\in V_1,\lambda\in\mathbf{R}$，故 V_1 是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间.

习题 6-1

1. 检验以下集合对于所指的线性运算是否构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

(1) 次数等于 $n(n\geqslant 1)$ 的实系数多项式的全体，对于多项式的加法和数量乘法；

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的实系数多项式 $f(\boldsymbol{A})$ 的全体，对于矩阵的加法和数量乘法；

(3) 全体实数的二元数列，对于下面定义的运算：

$$(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2),$$

$$k\circ(a_1,b_1)=\left(ka_1,kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2\right);$$

(4) 全体正实数的集合 $\mathbf{R}^+$，加法与数量乘法定义为

$$a\oplus b=ab,\quad k\circ a=a^k.$$

2. 设 $L(\mathbf{R})$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上所有实函数的集合，对任意 $f,g\in L(\mathbf{R}),\lambda\in\mathbf{R}$，定义

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),(\lambda f)(x)=\lambda f(x),\quad x\in\mathbf{R}.$$

对于上述运算 $L(\mathbf{R})$ 构成实数域 $\mathbf{R}$ 上向量空间. 下列子集是否是 $L(\mathbf{R})$ 的子空间？为什么？

(1) 所有连续函数的集合 W_1；

(2) 所有奇函数的集合 W_2；

(3) $W_3=\{f\mid f\in L(\mathbf{R}),f(0)=f(1)\}$.

3. 下列集合是否为 $\mathbf{R}^n$ 的子空间？为什么？其中 $\mathbf{R}$ 为实数域.

(1) $W_1=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1+x_2+\cdots+x_n=0,x_i\in\mathbf{R}\}$；

(2) $W_2=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1x_2\cdots x_n=0,x_i\in\mathbf{R}\}$；

(3) $W_3=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid$ 每个分量 x_i 是整数$\}$.

6.2 基、维数与坐标

在第 3 章中，我们定义了一些重要概念，如线性组合、线性表示、线性相关、线性无关等. 这些概念以及相关的性质只涉及向量的线性运算. 但是，它们对于一般的线性空间中的向量仍然适用. 因此，今后我们将直接引用这些概念及相关性质.

现在引入线性空间的基、维数与坐标的概念，它们是线性空间的重要属性.

6.2.1 线性空间的基与维数

定义 6.3 设 V 是数域 F 上的线性空间，如果 V 中存在 n 个向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，满足：

(1) $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关；

(2) V 中任何向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表示. 即存在 $k_1,k_2,\cdots,k_n\in F$，使得 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$.

则称 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 为 V 的一个**基**(或基底)，基中向量的个数 n 称为线性空间 V 的**维数**，记为维 V 或 $\dim V$. 若 $\dim V<+\infty$，称 V 为**有限维线性空间**，否则，称 V 为**无限维线性空间**，本书

主要讨论有限维线性空间.

关于线性空间的基与维数,有以下性质:

(1) n 维线性空间中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 必可由 V 的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表示,且表示法唯一.

(2) 线性空间的基(只要存在)必不唯一.

(3) 有限维线性空间的维数是唯一确定的.

定理 6.2 n 维线性空间中任意 n 个线性无关的向量均可构成一个基.

证 设 V 是 n 维线性空间,$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一个基,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 中一个线性无关的向量组. 为证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是基,只需证明 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示. 此时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中每个向量都可由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表示. 这是 $n+1$ 个向量被 n 个向量线性表示的情况,即知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关,再由定理 3.7,便知 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示. 定理得证.

例 1 求实数域 $\mathbf{R}$ 上线性空间 $\mathbf{R}^3$ 的维数和一个基.

解 考虑 $\mathbf{R}^3$ 中向量组

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$

显然满足:

(1) $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 线性无关;

(2) 对于 $\mathbf{R}^3$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$,有 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+a_3\boldsymbol{\varepsilon}_3$. 由定义 6.3 可知 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$,$\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基,从而 $\mathbf{R}^3$ 的维数为 3.

例 2 求数域 F 上线性空间 $F^{2\times 3}$ 的维数和一个基.

解 $F^{2\times 3}$ 中向量组

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{13}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{23}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

显然满足:

(1) $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{13},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22},\boldsymbol{E}_{23}$线性无关.

(2) 对于 $F^{2\times 3}$中任一元素 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}$,有

$$\boldsymbol{A}=a_{11}\boldsymbol{E}_{11}+a_{12}\boldsymbol{E}_{12}+a_{13}\boldsymbol{E}_{13}+a_{21}\boldsymbol{E}_{21}+a_{22}\boldsymbol{E}_{22}+a_{23}\boldsymbol{E}_{23},$$

于是知:$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{13},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22},\boldsymbol{E}_{23}$ 为 $F^{2\times 3}$的一个基,从而 $\dim(F^{2\times 3})=6$.

类似地可知,线性空间 $F^{m\times n}$的维数为 mn,其一个基为:

$$\boldsymbol{E}_{ij},\qquad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n,$$

其中 $\boldsymbol{E}_{ij}$是 $m\times n$ 矩阵,它的(i,j)元素为 1,其余全为 0.

例 3 设 V 是二阶实对称矩阵全体的集合,对于通常的矩阵加法、矩阵数乘两种运算构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间,求出 V 的维数和一个基.

解 V 中一般元素可表示为$\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}$,$a,b,c\in\mathbf{R}$,$a,b,c$ 所在位置各体现一个自由度.

考虑 V 中向量组

$$A_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},$$

满足：

(1) A_1,A_2,A_3 线性无关；

(2) 对 V 中任一矩阵，$A=\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}$，有 $A=aA_1+bA_2+cA_3$，可见 A_1,A_2,A_3 为 V 的一个基，$\dim(V)=3$.

6.2.2 线性空间中向量的坐标

定义 6.4 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一个基，对于 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$，有数域 F 中唯一的一组数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，使 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$，称有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标，记为 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$. 如果借用矩阵乘法的形式，记

$$a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标可以方便地用一个 n 维列向量(数组向量)表示出来：

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}.$$

例 4 $F[x]_n$ 中向量 $f(x)=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$ 在基 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 下的坐标为 $(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})^{\mathrm{T}}$.

例 5 设 V 是二阶实对称矩阵全体的集合，对于矩阵加法与矩阵数乘运算构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间，求 V 中向量 $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$ 在基：

$$E_1=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix},\quad E_2=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\quad E_3=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

下的坐标.

解 因为 $A=\frac{1}{2}E_1+3E_2+2E_3$，所以 A 在基 E_1,E_2,E_3 下的坐标为 $\left(\frac{1}{2},3,2\right)^{\mathrm{T}}$.

习题 6-2

1. 实数域 $\mathbf{R}$ 上 $m\times n$ 矩阵所成的向量空间 $M_{m\times n}(\mathbf{R})$ 的维数等于多少？写出它的一个基.

2. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是数域 F 上 n 维向量空间 V 的一个基，试判断 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$ 是不是 V 的一个基，为什么？

3. 在 F^4 中求向量 $\boldsymbol{\xi}=(0,0,0,1)$关于基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0,0)$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,-1,-1)$的坐标.

6.3 基变换与坐标

6.3.1 基变换公式与过渡矩阵

设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间,$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及 $\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$是 V 的两个基,并设

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1'=a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2'=a_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\\ \qquad\vdots\\ \boldsymbol{\varepsilon}_n'=a_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\varepsilon}_n.\end{cases}\tag{6.1}$$

若令

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 列恰是向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_i'$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是唯一确定的,并且是可逆的,把(6.1)式形式地表达为

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n')=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\boldsymbol{A}.\tag{6.2}$$

把(6.2)式称为**基变换公式**,其中的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 的**过渡矩阵**(或称**变换矩阵**).

在(6.2)式两端同时右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$,便得

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n')\boldsymbol{A}^{-1}.$$

这说明由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 到基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的过渡矩阵恰是由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到 $\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 的过渡矩阵的逆矩阵.

例 1 已知矩阵空间 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的两个基

(1) $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$.

求由基(1)到基(2)的过渡矩阵.

解 为了计算简单,引进 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的简单基:

(3) $\boldsymbol{I}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{I}_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{I}_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{I}_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$,

直接写出由基(3)到基(1)的过渡矩阵:

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\1&-1&0&0\end{bmatrix},$$

即$(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)=(\boldsymbol{I}_1,\boldsymbol{I}_2,\boldsymbol{I}_3,\boldsymbol{I}_4)\boldsymbol{C}_1$.再写出由基(3)到基(2)的过渡矩阵:

$$\boldsymbol{C}_2=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},$$

即$(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)=(\boldsymbol{I}_1,\boldsymbol{I}_2,\boldsymbol{I}_3,\boldsymbol{I}_4)\boldsymbol{C}_2$.所以有

$$(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2.$$

于是得到由基(1)到基(2)的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&1&1&1\\0&1&1&1\\2&2&1&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

6.3.2 坐标变换公式

下面研究同一向量在两个基下的坐标间的关系.

设基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$与$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$之间的关系同(6.2)式,向量$\boldsymbol{\alpha}$在这两个基下的坐标分别为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\text{ 和 }\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix},$$

于是有

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n')\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix}.$$

根据向量在取定基下坐标的唯一性,得

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix}, \tag{6.3}$$

或写成

$$\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}. \tag{6.3$'$}$$

(6.3)式或(6.3)′式叫做**坐标变换公式**.

定理 6.3 在n维线性空间V中,设向量$\boldsymbol{\alpha}$在两个基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$及$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$之下

的坐标分别为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$及$(x_1',x_2',\cdots,x_n')^{\mathrm{T}}$,如果两个向量组间的变换如(6.2)式,则坐标变换公式为(6.3)式或(6.3)′式.

例 2 在线性空间 $\mathbf{R}^3$ 中,求出由基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-2\\-5\\-1\end{bmatrix}$$

到基

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

的变换公式,并求向量$\boldsymbol{\xi}=(4,12,6)^{\mathrm{T}}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$.

解 首先容易得到由基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$到基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的变换公式为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{A},$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&-1&-2\\1&0&-5\\3&1&-1\end{bmatrix},\quad 求得\quad \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}&\frac{5}{2}\\-7&4&-6\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

于是,由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$的变换公式为$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}^{-1}$.
又因为向量$\boldsymbol{\xi}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的坐标显然为$(4,12,6)^{\mathrm{T}}$,依坐标变换公式便有

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}4\\12\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-16\\-1\end{bmatrix}.$$

例 3 对于数域 F 上的线性空间 $F^{2\times 2}$,证明:

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

是一个基,并求$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$在该基下的坐标.

解 取基

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},$$

则有

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{E}_1,\\\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{E}_4,\\\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3,\\\boldsymbol{A}_4=\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_3,\end{cases}$$

即

$$(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)=(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4)\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\0&1&0&0\end{bmatrix},$$

过渡矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\0&1&0&0\end{bmatrix},$$

$|\boldsymbol{B}|=-2\neq0$,故 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 是一个基.

因为 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4$ 下的坐标为 $(a_{11},a_{12},a_{21},a_{22})^{\mathrm{T}}$,所以 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 下的坐标为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{21}\\a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{22}\\\frac{1}{2}(a_{12}+a_{21})\\\frac{1}{2}(a_{12}-a_{21})\end{bmatrix}.$$

习题 6-3

1. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是线性空间 V 的一个基,$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+x_3\boldsymbol{\varepsilon}_3$,则由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{T}=$________,而 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的坐标是________.

2. 在 $\mathbf{R}^3$ 中求基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1=(3,0,1)$,$\boldsymbol{\beta}_2=(2,0,0)$,$\boldsymbol{\beta}_3=(0,2,-2)$ 的过渡矩阵.

3. 在 $\mathbf{R}^4$ 中,求由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 的过渡矩阵,并求向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在所指基下的坐标.设:

(1) $\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0,0),\\\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,0),\\\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1,0),\\\boldsymbol{\varepsilon}_4=(0,0,0,1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=(2,1,-1,1),\\\boldsymbol{\eta}_2=(0,3,1,0),\\\boldsymbol{\eta}_3=(5,3,2,1),\\\boldsymbol{\eta}_4=(6,6,1,3),\end{cases}$

$\boldsymbol{\xi}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下的坐标;

(2) $\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,2,-1,0),\\\boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,-1,1,1),\\\boldsymbol{\varepsilon}_3=(-1,2,1,1),\\\boldsymbol{\varepsilon}_4=(-1,-1,0,1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=(2,1,0,1),\\\boldsymbol{\eta}_2=(0,1,2,2),\\\boldsymbol{\eta}_3=(-2,1,1,2),\\\boldsymbol{\eta}_4=(1,3,1,2),\end{cases}$

$\boldsymbol{\xi}=(1,0,0,0)$在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的坐标.

4. 继第 3 题(1),求一非零向量 $\boldsymbol{\xi}$,它在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下有相同的坐标.

6.4 线性变换及其矩阵

线性空间是某类客观事物从量的方面的一个抽象，而线性变换则研究线性空间中元素之间的最基本联系，本节介绍线性变换的基本概念，并讨论线性变换与矩阵之间联系.

6.4.1 线性变换及其运算

定义 6.5 对于线性空间 V，如果存在一种规则 σ：对于 V 中每个元素 $\boldsymbol{\alpha}$，都有 V 中一个确定元素 $\boldsymbol{\alpha}'$ 与之对应，则称 σ 为线性空间 V 的一个**变换**，并把这种对应关系记为 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}'$，$\boldsymbol{\alpha}'$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在变换 σ 下的**像**，$\boldsymbol{\alpha}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}'$ 在变换 σ 下的一个**原像**.

V 中所有元素在变换 σ 下的像所成的集合称为变换 σ 的**像集**（或值域），记为 $\sigma(V)$. 显然，$\sigma(V)\subseteq V$.

定义 6.6 设 σ,τ 都是线性空间 V 的变换，如果对于任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，总有 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\tau(\boldsymbol{\alpha})$，则说变换 σ 与变换 τ **相等**，记作 $\sigma=\tau$.

几个特殊的变换：

恒等变换 1^*：$1^*(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\in V$；

零变换 0^*：$0^*(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{o},\alpha\in V$；

数乘变换 $k^*(k\in \boldsymbol{F})$：$k^*(\boldsymbol{\alpha})=k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\in V$.

设 σ,τ 都是线性空间 V 的变换. 可定义 σ 与 τ 的和变换 $\sigma+\tau$ 及乘积变换 $\sigma\tau$ 为：

$$(\sigma+\tau)(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\tau(\boldsymbol{\alpha}),\quad \boldsymbol{\alpha}\in V;$$

$$\sigma\tau(\boldsymbol{\alpha})=\sigma[\tau(\boldsymbol{\alpha})],\quad \boldsymbol{\alpha}\in V.$$

如果 V 是数域 F 上的线性空间，对于 F 中的数 k 及 V 的变换 σ，可定义 σ 的数乘变换 $k\sigma$ 为

$$(k\sigma)(\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\quad \boldsymbol{\alpha}\in V.$$

定义 6.7 对于线性空间 V 的变换 σ，若有 V 的变换 τ，使 $\sigma\tau=\tau\sigma=1^*$，则称 σ 为**可逆变换**，τ 称为 σ 的**逆变换**，记为 σ^{-1}.

定义 6.8 设 V 是数域 F 上的线性空间，σ 是 V 的一个变换. 如果对于 V 中任意元素 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 以及数域 F 中任意的数 k，总有：

(1) $\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$，

(2) $\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})$.

则称 σ 为线性空间 V 的一个**线性变换**.

如果线性空间 V 的线性变换 σ 还是可逆变换，则称 σ 为 V 的一个**可逆线性变换**.

（数域 F 上的）线性空间 V 的线性变换 σ 具有如下一些基本性质：

性质 1 $\sigma(\boldsymbol{o})=\boldsymbol{o}$；$\sigma(-\boldsymbol{\alpha})=-\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\alpha}\in V$.

证 $\sigma(\boldsymbol{o})=\sigma(0\boldsymbol{\alpha})=0\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{o}$，

$$\sigma(-\boldsymbol{\alpha})=\sigma[(-1)\boldsymbol{\alpha}]=(-1)\sigma(\boldsymbol{\alpha})=-\sigma(\boldsymbol{\alpha}).$$

性质 2 线性变换保持线性组合关系不变，即对 V 中任何向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 及数域 F 中任何数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 总有：

$$\sigma(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s)=k_1\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_s\sigma(\boldsymbol{\alpha}_s).$$

性质 3 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_s)$ 也线性相关.

证 若 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则有 F 中不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{o}$. 于是 $\sigma(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s)=\sigma(\boldsymbol{o})$，利用性质 1 和性质 2，上式即为 $k_1\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_s\sigma(\boldsymbol{\alpha}_s)=\boldsymbol{o}$. 说明 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_s)$是 V 的一个线性相关组.

性质 4 若 σ,τ 都是线性变换，则 $\sigma+\tau,\sigma\tau,k\sigma(k\in F)$也都是线性变换.

证 对任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ 及任意的 $k\in F$，有

$$\begin{aligned}(\sigma+\tau)(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})&=\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\tau(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})+\tau(\boldsymbol{\alpha})+\tau(\boldsymbol{\beta})\\&=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\tau(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})+\tau(\boldsymbol{\beta})=(\sigma+\tau)(\boldsymbol{\alpha})+(\sigma+\tau)(\boldsymbol{\beta});\\(\sigma+\tau)(k\boldsymbol{\alpha})&=\sigma(k\boldsymbol{\alpha})+\tau(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})+k\tau(\boldsymbol{\alpha})\\&=k[\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\tau(\boldsymbol{\alpha})]=k(\sigma+\tau)(\boldsymbol{\alpha}).\end{aligned}$$

所以 $\sigma+\tau$ 为线性变换.

类似地可以证明 $\sigma\tau$ 为线性变换. 再由$(k\sigma)(\boldsymbol{\alpha})=k^*(\sigma(\boldsymbol{\alpha}))$，而 k^* 是线性变换，可知 $k\sigma$ 亦为线性变换.

性质 5 线性变换满足如下算律：对于线性空间 V 的线性变换 σ,τ,ρ 及数域 F 上的数 k,l，总有

$$\begin{aligned}&\sigma+\tau=\tau+\sigma;\\&(\sigma+\tau)+\rho=\sigma+(\tau+\rho);\\&(\sigma\tau)\rho=\sigma(\tau\rho);\\&\sigma(\tau+\rho)=\sigma\tau+\sigma\rho;\\&(\sigma+\tau)\rho=\sigma\rho+\tau\rho;\\&(kl)\sigma=k(l\sigma);\\&(k+l)\sigma=k\sigma+l\sigma;\\&k(\sigma+\tau)=k\sigma+k\tau.\end{aligned}$$

性质 6 若 σ 是可逆线性变换，则 σ^{-1}也是可逆线性变换.

证 只需证 σ^{-1}为线性变换，对于线性空间中的任意向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(\sigma\sigma^{-1})(\boldsymbol{\alpha})+(\sigma\sigma^{-1})(\boldsymbol{\beta})=\sigma[\sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha})]+\sigma[\sigma^{-1}(\boldsymbol{\beta})].$$

以 σ^{-1}作用等式两端得 $\sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha})+\sigma^{-1}(\boldsymbol{\beta})$.

对于 V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 及数域 F 中的任意数 k，有

$$k\boldsymbol{\alpha}=k(\sigma\sigma^{-1})(\boldsymbol{\alpha})=k\sigma[\sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha})]=\sigma[k\sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha})]$$

以 σ^{-1}作用两端得

$$\sigma^{-1}(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha}).$$

于是知 σ^{-1}为线性变换，从而是可逆线性变换.

例 1 令 $F^{n\times n}$表示数域 F 上一切 n 阶方阵所构成的向量空间，取定 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in F^{n\times n}$，对任意的 $\boldsymbol{X}\in F^{n\times n}$，定义 $\sigma(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}$. 证明 σ 是 $F^{n\times n}$上的一个线性变换.

证 对任意的 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in F^{n\times n}$，$k\in F$，有：

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})&=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\boldsymbol{B}\\&=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{B}\\&=\sigma(\boldsymbol{X})+\sigma(\boldsymbol{Y}),\end{aligned}$$

$$\sigma(k\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(k\boldsymbol{X})\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(k\boldsymbol{X})\boldsymbol{B}=k(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B})=k\sigma(\boldsymbol{X}).$$

因此 σ 是 $F^{n\times n}$ 上的一个线性变换.

6.4.2 线性变换的矩阵表示

设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间,$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一个基.

首先说明:线性空间 V 的一个线性变换 σ,可以由它对基的作用完全确定,即已知 σ 将 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 化为 $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_i)(i=1,2,\cdots,n)$,则对 V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$,必有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=k_1\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1)+k_2\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2)+\cdots+k_n\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n).$$

这说明 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})$ 被完全确定.由 $\boldsymbol{\alpha}$ 的任意性知线性变换 σ 被完全确定了.

从另一个角度看,$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_i)$ 作为 V 中向量,又可以由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 唯一地线性表示.设

$$\begin{cases}\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\\ \sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=a_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\\ \qquad\qquad\vdots\\ \sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n)=a_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\varepsilon}_n.\end{cases}\tag{6.4}$$

若记

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{21}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix},$$

则(6.4)式可表示为

$$(\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n))=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}.\tag{6.5}$$

引进记号 $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 来表示 $(\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n))$,故(6.5)式又可表示为

$$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}.\tag{6.6}$$

其中(6.6)式中的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**线性变换 σ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵**.

显然,当 σ 确定时,它在取定基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是被 σ 唯一确定的.事实上,$\boldsymbol{A}$ 的第 i 列正是 $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_i)$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标.

反过来,若给数域 F 上一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$,可以证明 V 上存在唯一的线性变换 σ,使得 σ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵恰为 $\boldsymbol{A}$.

证明过程如下:

先构造 V 的一个变换 σ,再证明它是线性变换,并且是满足(6.6)式的唯一的线性变换.记

$$\boldsymbol{\alpha}_i=a_{1i}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{2i}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{ni}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

对于 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$,令

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

显然 σ 是 V 的一个变换.σ 还满足:

(1) 对于 V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$,若:

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n,$$
$$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+l_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+l_n\boldsymbol{\varepsilon}_n,$$

按 σ 的定义应有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$
$$\sigma(\boldsymbol{\beta})=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

而

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(k_1+l_1)\boldsymbol{\varepsilon}_1+(k_2+l_2)\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+(k_n+l_n)\boldsymbol{\varepsilon}_n,$$

于是又有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(k_1+l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_n+l_n)\boldsymbol{\alpha}_n,$$

显然满足

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta}).$$

(2) 对于任意的 $k\in F$ 及 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n\in V$,便有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$
$$k\boldsymbol{\alpha}=kk_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+kk_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+kk_n\boldsymbol{\varepsilon}_n,$$
$$\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=kk_1\boldsymbol{\alpha}_1+kk_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+kk_n\boldsymbol{\alpha}_n.$$

可见 $\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})$.

由(1)、(2)即知 σ 是 V 的线性变换.

下面证明线性变换 σ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵恰为 $\boldsymbol{A}$,即证(6.6)式成立. 事实上,因为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i=0\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+0\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}+1\boldsymbol{\varepsilon}_i+0\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}+\cdots+0\boldsymbol{\varepsilon}_n,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

故有

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_i)&=0\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+1\boldsymbol{\alpha}_i+0\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\alpha}_i\\&=a_{1i}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{2i}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{ni}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\quad i=1,2,\cdots,n.\end{aligned}$$

即知(6.6)式成立.

由于线性变换 σ 对基的作用已经由 $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=\boldsymbol{\alpha}_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 完全确定,所以上述满足(6.6)式的线性变换 σ 是唯一的.

总之,在线性空间 V 的取定基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 之下,V 的线性变换 σ 与数域 F 上的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相互唯一确定. 也可以说,在取定基之下,V 的线性变换与 F 上 n 阶矩阵一一对应,其对应关系如(6.6)式所示.

例 2 对于线性空间 $\mathbf{R}[x]_3$,已知线性变换 τ 为求导数:$\tau[f(x)]=f'(x)$. 在基 $\varepsilon_1=1,\varepsilon_2=x,\varepsilon_3=x^2$ 下,因为

$$\tau(\varepsilon_1)=0,$$
$$\tau(\varepsilon_2)=1=\varepsilon_1,$$
$$\tau(\varepsilon_3)=2x=2\varepsilon_2,$$

所以 τ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

即有

$$\tau(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{A}.$$

例 3 n 维线性空间 V 的线性变换 σ 为数乘变换 k^* 的充分必要条件是 σ 在 V 的任一基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 n 阶数量矩阵 $k\boldsymbol{I}$. 特别地,线性变换 σ 为零变换的充分必要条件是

它在任一基下的矩阵为零矩阵；线性变换 σ 为恒等变换的充分必要条件是它在任一基下的矩阵为单位矩阵.

证 如果 $\sigma=k^*$，则有 $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=k^*(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=k\boldsymbol{\varepsilon}_i, i=1,2,\cdots,n$，易知 σ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{bmatrix}=k\boldsymbol{I}.$$

反过来，如有

$$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{bmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{bmatrix},$$

即有

$$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=k\boldsymbol{\varepsilon}_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

对于任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，设 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$，则有

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{\alpha})&=k_1\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1)+k_2\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2)+\cdots+k_n\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n)\\&=k_1k\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_2k\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_nk\boldsymbol{\varepsilon}_n\\&=k\boldsymbol{\alpha}=k^*(\boldsymbol{\alpha}).\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{\alpha}$ 的任意性，知 $\sigma=k^*$.

零变换 0^* 和恒等变换 1^* 不过是数乘变换 k^* 当 $k=0$ 及 $k=1$ 时的特例.

例 4 在取定基下，n 维线性空间的线性变换与数域 F 上的 n 阶矩阵是一一对应的. 若设线性变换 σ,τ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，证明 $\sigma+\tau,\sigma\tau$ 及 $k\sigma(k\in F)$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵恰为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB}$ 及 $k\boldsymbol{A}$.

证

$$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A},$$
$$\tau(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{B},$$

可知

$$\begin{aligned}(\sigma+\tau)(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)&=((\sigma+\tau)(\boldsymbol{\varepsilon}_1),(\sigma+\tau)(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,(\sigma+\tau)(\boldsymbol{\varepsilon}_n))\\&=(\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1)+\tau(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2)+\tau(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n)+\tau(\boldsymbol{\varepsilon}_n))\\&=(\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n))+(\tau(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\tau(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\tau(\boldsymbol{\varepsilon}_n))\\&=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)A+(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{B}\\&=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}).\end{aligned}$$

说明 $\sigma+\tau$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵恰为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

类似可证 $\sigma\tau,k\sigma(k\in F)$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{AB},k\boldsymbol{A}$.

定理 6.4 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间，在取定基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 之下，V 的线性变换与 F 上 n 阶矩阵一一对应，这种对应关系保持加法、保持乘法、保持数乘.

定理 6.5 设线性空间 V 的线性变换 σ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则 σ 可逆的充

分必要条件是$\boldsymbol{A}$可逆. 并且,当σ可逆时,σ^{-1}在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的矩阵恰是$\boldsymbol{A}^{-1}$.

证 如果线性变换σ可逆,可设σ^{-1}在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的矩阵为$\boldsymbol{C}$,于是$\sigma\sigma^{-1}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的矩阵为$\boldsymbol{AC}$. 因为$\sigma\sigma^{-1}=1^*$,由本节中的例3知$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{I}$,故$\boldsymbol{A}$可逆,且$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{-1}$,即说线性变换$\sigma^{-1}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的矩阵恰是$\boldsymbol{A}^{-1}$.

反之,若线性变换σ在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的矩阵$\boldsymbol{A}$是可逆的,可设在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下与矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$相应的线性变换为$\rho$. 于是线性变换$\sigma\rho$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的矩阵应为$\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{I}$. 再由本节中的例3知$\sigma\rho=1^*$. 同理可证$\rho\sigma=1^*$,故知$\sigma$可逆,且$\sigma^{-1}=\rho$.

例 5 对线性空间$\mathbf{R}[x]_3$,已知τ为求导数的线性变换$\tau[f(x)]=f'(x)$,在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1=1$,$\boldsymbol{\varepsilon}_2=x,\boldsymbol{\varepsilon}_3=x^2$下,因为$\tau(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=0,\tau(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=1=\boldsymbol{\varepsilon}_1,\tau(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=2x=2\boldsymbol{\varepsilon}_2$,证明$\tau$不是可逆线性变换;而$\sigma=\tau+1^*$是可逆的线性变换. 对于$\mathbf{R}[x]_3$中的向量$f(x)=2-x^2$,求出$\sigma^{-1}[f(x)]$.

解 τ在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1=1,\boldsymbol{\varepsilon}_2=x,\boldsymbol{\varepsilon}_3=x^2$下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$显然不可逆,故由定理6.5知τ不是可逆的线性变换.

因为恒等变换1^*是线性变换并且在任一基下的矩阵都是单位矩阵. 故知σ(作为两个线性变换之和)为线性变换,根据定理6.5又知$\sigma=\tau+1^*$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

因为$\boldsymbol{B}$可逆,由定理6.5知σ为可逆线性变换. 故

$$\sigma^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{B}^{-1}. \tag{6.7}$$

计算得

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

由(6.7)式可得

$$\sigma^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\boldsymbol{\varepsilon}_1,\sigma^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=2\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3.$$

故

$$\sigma^{-1}[f(x)]=\sigma^{-1}(2\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_3)=2\sigma^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)-\sigma^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=2\boldsymbol{\varepsilon}_1-(2\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3)=2\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_3=2x-x^2.$$

定理 6.6 设$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$是线性空间$V$的一个基,线性变换$\sigma$在该基下的矩阵为$\boldsymbol{A}$. 如果$V$中向量$\boldsymbol{\xi}$在这组基下的坐标为$x$,则$\sigma(\boldsymbol{\xi})$在该基下的坐标为$\boldsymbol{Ax}$.

证 设$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,即$\boldsymbol{\xi}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$,于是

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{\xi})&=x_1\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1)+x_2\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2)+\cdots+x_n\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n)\\&=(\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n))\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}).$$

可见 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 恰是 $\sigma(\boldsymbol{\xi})$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标.

例 6 利用定理 6.6 计算本节例 5 中的 $\sigma^{-1}[f(x)]$.

解 $f(x)=2-x^2$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标为 $(2,0,-1)^{\mathrm{T}}$，则 $\sigma^{-1}[f(x)]$ 在该基下的坐标为

$$\boldsymbol{B}^{-1}\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}.$$

故有

$$\sigma^{-1}[f(x)]=0\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_3=2x-x^2.$$

定理 6.7 同一线性变换在不同基下的矩阵是相似的. 具体地说，如果线性空间 V 的线性变换 σ 在两个基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 下的矩阵分别是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 的变换矩阵为 $\boldsymbol{P}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

证

$$\left.\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)&=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A},\\\sigma(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)&=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{B},\\(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)&=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{P},\end{aligned}\right\}\tag{6.8}$$

此时 $(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{P}^{-1}$. 于是

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)&=\sigma((\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{P})\\&=(\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n))\boldsymbol{P}\\&=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\\&=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}.\end{aligned}$$

与(6.8)式对照，注意到线性变换在取定基下的矩阵是唯一的，即知 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

习题 6-4

1. 设 T 为 $\mathbf{R}^2$ 中的一个线性变换，且 $T(\boldsymbol{\alpha}_1)=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$；$T(\boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$.

(1) 对于任意元素 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$，求 $T(\boldsymbol{x})$；

(2) 求 $\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 在 T 下的像；

(3) 求 T 在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 下的矩阵.

2. 设函数集合 $V_3=\{(a_2x^2+a_1x+a_0)\mathrm{e}^x\mid a_2,a_1,a_0\in\mathbf{R}\}$，对于函数的线性运算构成三

维线性空间，在 V_3 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1=x^2\mathrm{e}^x$，$\boldsymbol{\alpha}_2=x\mathrm{e}^x$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\mathrm{e}^x$.

(1) 求微分运算 D 在这组基下的矩阵；

(2) 设 $y=(3x^2+2x+6)\mathrm{e}^x$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

3. 设在 $\mathbf{R}^3$ 中，线性变换 T 关于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}15 & -11 & 5\\ 20 & -15 & -8\\ 8 & -7 & 6\end{bmatrix}.$$

求 T 在新基 $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=3\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵.

4. 已知定义在闭区间$[a,b]$上的所有实连续函数的集合 $C(a,b)$构成 $\mathbf{R}$ 上的一个线性空间，在 $C(a,b)$上定义变换 J，即 $J[f(t)]=\int_a^t f(u)\mathrm{d}u,\forall f(t)\in C(a,b)$. 试证明 J 是 $C(a,b)$的一个线性变换.

总 习 题 6

1. 下列集合能否构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间：

(1) 全体 n 阶实对称(反对称，上三角)矩阵，对于矩阵的加法和数量乘法；

(2) 平面上不平行于某一向量的全部向量所成的集合，对于向量的加法和数量乘法；

(3) 平面上全体向量，对于通常的加法和如下定义的数量乘法：$k\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{o}$；

(4) 集合与加法同(3)，数量乘法定义为：$k\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

2. 设 V_1,V_2 都是线性空间 V 的子空间，且 $V_1\subseteq V_2$，证明：如果 V_1 的维数与 V_2 的维数相等，那么 $V_1=V_2$.

3. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix},$$

求 $\mathbf{R}^{3\times 3}$中全体与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵所成子空间的维数和一个基.

4. 在 $\mathbf{R}^{2\times 2}$中，给定

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_4=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

(1) 证明 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4$ 是 $\mathbf{R}^{2\times 2}$的一个基.

(2) 证明

$$\boldsymbol{G}_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}_4=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

也是 $\mathbf{R}^{2\times 2}$的一个基.

(3) 求 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4$ 到 $\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{G}_4$ 的过渡矩阵.

(4) 求 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$在两个基下的坐标.

5. 设 T 为 $\mathbf{R}^3$ 中的一个线性变换，且 $T(a_1,a_2,a_3)=(2a_1-a_2,a_2+a_3,a_1)$，求 T 在基 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0),\boldsymbol{e}_2=(0,1,0),\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$下的矩阵.

6. 设 V_r 是 n 维线性空间 V_n 的一个子空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 V_r 的一个基，试证：V_n 中存在元素 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 成为 V_n 的一个基.

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基.

(1) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$ 也是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基.

(2) 求从旧基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到新基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$ 的过渡矩阵.

(3) 求向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的旧坐标$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 和新坐标$(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 间的变换公式.

8. 判断下列变换哪些是线性变换，哪些不是线性变换.

(1) 在 $\mathbf{R}^2$ 中，对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2)$规定：

① $T(\boldsymbol{\alpha})=(1+x_1,x_2)$；

② $T(\boldsymbol{\alpha})=(x_1,0)$；

③ $T(\boldsymbol{\alpha})=(x_2,x_2)$；

④ $T(\boldsymbol{\alpha})=(-x_1,x_2)$；

⑤ $T(\boldsymbol{\alpha})=(x_2,2x_1)$.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_0$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中固定的一个向量，规定 $T(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}_0\neq\boldsymbol{o})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^3$.

(3) 在 $\mathbf{R}^{n\times n}$中，取定 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，令 $T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AXB}$，其中 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^{n\times n}$.

9. 设三维线性空间 V 上的线性变换 T 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

(1) 求 T 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 下的矩阵；

(2) 求 T 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,k\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵，其中 $k\in\mathbf{R}$ 且 $k\neq0$；

(3) 求 T 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵.

10. 设 T 是线性空间 V 上的线性变换，如果 $T^{k-1}\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{o}$，但 $T^k\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{o}$，求证：$\boldsymbol{\xi},T\boldsymbol{\xi},\cdots,T^{k-1}\boldsymbol{\xi}(k>0)$线性无关.

参 考 文 献

[1] 贾兰香，邢金刚. 线性代数[M]. 北京：高等教育出版社，2011.

[2] 上海交通大学数学系编. 线性代数[M]. 3 版. 北京：科学出版社，2014.

[3] 华中科技大学数学系. 线性代数[M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，2008.

[4] 李书刚，陈生安，等. 线性代数[M]. 武汉：华中师范大学出版社，2013.

[5] 赵树嫄. 线性代数[M]. 3 版. 北京：中国人民大学出版社，2004.

[6] 杨永发. 线性代数[M]. 北京：中国科学技术出版社，2008.

[7] 白同亮，高桂英. 线性代数及其应用[M]. 北京：北京邮电大学出版社，2007.

[8] 陈维新. 线性代数简明教程[M]. 2 版. 北京：科学出版社，2008.

[9] 刘二根，王广超，朱旭生. MATLAB 与数学实验[M]. 北京：国防工业出版社，2015.

[10] 张德丰. MATLAB 数值分析与应用[M]. 2 版. 北京：国防工业出版社，2009.

习 题 答 案

第 1 章

习题 1-1

1. (1) 7；　(2) 5；　(3) 11；　(4) -18；　(5) 8；　(6) 60.
2. (1) $x=0$ 或 $x=2$；　(2) $x=0$ 或 $x=1$.

习题 1-2

1. 1234,1243,1324,1342,1423,1432,2134,2143,2314,2341,2413,2431,3124,3142,3214,3241,3412,3421,4123,4132,4213,4231,4312,4321.
2. A
3. (1) 4；　(2) 7；　(3) 13；　(4) $\frac{1}{2}n(n-1)$.

习题 1-3

1. (1) $(-1)^{n-1}n!$；　(2) 0；　(3) 1.
2. (1) 正；　(2) 负；　(3) 负.
3. $k=1,l=5$.
4. 略.

习题 1-4

1. (1) 0；　(2) 8；　(3) $-2(x^3+y^3)$.
2. (1) -270；　(2) -799.
3. 略.

习题 1-5

1. 0,29.
2. -15.
3. (1) $a+b+d$；　(2) 160；　(3) 0.

习题 1-6

1. (1) x^2y^2;　(2) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{n^n+n^{n-1}}{2}$.

2. (1) $x^n+(-1)^{n+1}y^n$;　(2) $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

3. (1) $x_1=-1, x_2=1, x_3=-2, x_4=2$;　(2) $x_1=a_1, x_2=a_2, \cdots, x_n=a_n$.

习题 1-7

1. (1) $x_1=3, x_2=4, x_3=5$;

   (2) $x=1, y=2, z=3$;

   (3) $x_1=\dfrac{9}{14}, x_2=\dfrac{1}{2}, x_3=-\dfrac{3}{2}, x_4=\dfrac{3}{14}$;

   (4) $x_1=0, x_2=\dfrac{4}{5}, x_3=\dfrac{3}{5}, x_4=-\dfrac{7}{5}$.

2. 仅有零解.

3. $k=-1$ 或 $k=4$.

总 习 题 1

1. (1) 0;　(2) 0;　(3) 5;　(4) $2x^3-6x^2+6$;　(5) $(1-\lambda)(\lambda^2+5\lambda+5)$.

2. $k=3$ 或 $k=1$.

3. $(-1)^{\frac{n^2+3n-4}{2}}n!$ 或 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$.

4. (1) 48;　(2) 8;　(3) -27;　(4) $1-x^2-y^2-z^2$;

   (5) 0;　(6) $2(3xyz-x^3-y^3-z^3)$.

5. 略.

6. (1) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-m\right)(-m)^{n-1}$;　(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix^{n-1}$;

   (3) $a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\right)$;　(4) $\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}a_i$.

7. 略.

8. (1) $x_1=3, x_2=1, x_3=1$;　(2) $x_1=3, x_2=-4, x_3=-1, x_4=1$.

9. $k\neq3$ 且 $k\neq-2$.

10. $a=-2$ 或 $a=1$.

第 2 章

习题 2-1

(1) $x=6$ 或 $x=-1$;　(2) $x=3, y=2, z=1$.

习题 2-2

1. (1) $\begin{bmatrix}-1 & 6 & 5\\ -2 & -1 & 12\end{bmatrix}$;　(2) $\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 0 & -2\end{bmatrix}$;　(3) $\begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix}$.

2. (1) $\begin{bmatrix}5&2\\7&0\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$; (3) $\begin{bmatrix}10&4&-1\\4&-3&-1\end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}$; (5) $\begin{bmatrix}3&-5&4\\1&4&-6\\6&2&-1\end{bmatrix}$; (6) $\begin{bmatrix}-6&29\\5&32\end{bmatrix}$.

3. (1) $\begin{bmatrix}-35&-30\\45&10\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$; (3) $\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$; (4) $\begin{bmatrix}a^n&0&0\\0&b^n&0\\0&0&c^n\end{bmatrix}$.

4. 证明略.

习题 2-3

1. (1) $\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}\\-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}\frac{d}{ad-bc}&\frac{-b}{ad-bc}\\\frac{-c}{ad-bc}&\frac{a}{ad-bc}\end{bmatrix}$; (3) $\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}$; (5) $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$; (6) $\begin{bmatrix}\frac{1}{a_1}&&&\\&\frac{1}{a_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\frac{1}{a_n}\end{bmatrix}$.

2. $\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}$; $\begin{bmatrix}1&2&-1\\-1&1&1\\-1&-5&4\end{bmatrix}$; $\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&-1\\-1&1&1\\-1&-5&4\end{bmatrix}$.

习题 2-4

1. (1) $\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

2. (1) $\begin{bmatrix}-2&1\\1&-2\\3&-2\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}3&0&-2\\5&-1&-2\\0&3&2\end{bmatrix}$; (3) $\begin{bmatrix}a&0&ac&0\\0&a&0&ac\\1&0&c+bd&0\\0&1&0&c+bd\end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$.

习题 2-5

1. (1) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$; (3) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$; (5) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$; (6) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$.

2. (1) $\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{9}&\frac{1}{9}\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}\frac{d}{ad-bc}&\frac{-b}{ad-bc}\\\frac{-c}{ad-bc}&\frac{a}{ad-bc}\end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix}22&-6&-26&17\\-17&5&20&-13\\-1&0&2&-1\\4&-1&-5&3\end{bmatrix}$; (4) $\begin{bmatrix}1&-3&11&-20\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

习题 2-6

1. (1) 2; (2) 2; (3) 3.
2. $a=1$.
3. (1) $a\neq-\frac{1}{3}$且 $a\neq1$; (2) $a=-\frac{1}{3}$; (3) $a=1$.

习题 2-7

1. (1) -64;

(2) $2*x-6*x*k-3*x*y-74+6*k+7*z*y+10*z*k+2*z-24*y$.

2. (1) $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&-1&-2\\6&9&5\\-3&1&12\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&3&-6\\2&13&-2\\-15&-3&21\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1&-2&-2\\9&3&14\\5&7&10\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}*\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&-4&-1\\-2&4&14\\-1&4&10\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1/3&-4/3&2/3\\1/4&1&1/4\\1/3&-1/3&2/3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-2&3&-5\\-5&3&-4\\7&-9&16\end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix}5/3&0&1/3\\-1&1/4&-1/4\\2/3&0&1/3\end{bmatrix}$.

(3) 3.

总 习 题 2

1. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&3&1\\3&8&2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&-3&0\\3&6&-1\end{bmatrix}$, $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}4&2&2\\0&9&1\end{bmatrix}$.

2. $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}4&\frac{3}{2}&-1\\-1&\frac{5}{2}&1\\\frac{7}{2}&\frac{11}{2}&\frac{5}{2}\end{bmatrix}$.

3. $a=0,b=2,c=1,d=2$.

4. 略.

5. (1) $\begin{bmatrix}7&24&3\\7&-8&13\\7&40&-2\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}3&2&-1&0\\-3&-2&1&0\\6&4&-2&0\\9&6&-3&0\end{bmatrix}$; (3) 5;

(4) $c+2b_1x+2b_2y+a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$.

6. $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}^3=\begin{bmatrix}1&0\\3\lambda&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}^n=\begin{bmatrix}1&0\\n\lambda&1\end{bmatrix}$.

7. (1) $\begin{bmatrix}a&b\\0&a\end{bmatrix}$,其中 a,b 为任意常数; (2) $\begin{bmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{bmatrix}$,其中 a,b,c 为任意常数.

8～14. 略.

15. (1) $\begin{bmatrix}-3&-2\\4&1\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}-24&-30\\60&36\end{bmatrix}$.

16. $\begin{bmatrix}14&3&9\\0&5&3\\10&6&12\end{bmatrix}$.

17. (1) $\begin{bmatrix}\frac{1}{10}&\frac{3}{10}\\\frac{3}{20}&-\frac{1}{20}\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$; (3) $\begin{bmatrix}1&-2&7\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{8}&-\frac{5}{24}&-\frac{1}{12}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$; (5) 不存在; (6) $\begin{bmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\end{bmatrix}$.

18. (1) $\begin{bmatrix}2&7&-10\\-1&-23&33\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$; (3) $\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{bmatrix}$.

19. $\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}$； $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$； $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$.

20. 0.

21. −3.

22. (1) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

23～29. 略.

30. (1) $\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 5 \\ -4 & 9 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}$.

31. (1) $\begin{bmatrix} & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix} & & & \boldsymbol{A}_s^{-1} \\ & & \iddots & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$.

32. (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} & & & & \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} & & & & \\ & \frac{1}{a_3} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{a_n} & \end{bmatrix}$.

33. (1) 2； (2) 3； (3) 2； (4) 2； (5) 1(a_i, b_j 不全为零)，0(其他情形).

第 3 章

习题 3-1

1. (1) $\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=2, \\ x_3=1; \end{cases}$ (2) 无解;

(3) $\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2}+c_1, \\ x_2=c_1, \\ x_3=\dfrac{1}{2}+c_2, \\ x_4=c_2 \end{cases}$ (c_1, c_2 为任意常数);

(4) $\begin{cases} x_1=-c_1+\dfrac{7}{6}c_2, \\ x_2=c_1+\dfrac{5}{6}c_2, \\ x_3=c_1, \\ x_4=\dfrac{1}{3}c_2, \\ x_5=c_2 \end{cases}$ (c_1, c_2 为任意常数).

2. (1) 当 $a=0$,且 $b=-2$ 时,有解:

$\begin{cases} x_1=-1-4c_2, \\ x_2=1+c_1+c_2, \\ x_3=c_1, \\ x_4=c_2 \end{cases}$ (c_1, c_2 为任意常数);

(2) 当 $a\neq 0$,且 $b\neq \pm 1$ 时,有唯一解:

$\begin{cases} x_1=\dfrac{5-b}{a(b+1)}, \\ x_2=-\dfrac{2}{b+1}, \\ x_3=\dfrac{2(b-1)}{b+1}; \end{cases}$

当 $a\neq 0$,且 $b=1$ 时,有无穷多解:

$\begin{cases} x_1=\dfrac{1-c}{a}, \\ x_2=c, \\ x_3=0 \end{cases}$ (c 为任意常数);

当 $a=0$,且 $b=1$ 时,有无穷多解:

$$\begin{cases} x_1=c, \\ x_2=1, \quad (c \text{ 为任意常数}); \\ x_3=0 \end{cases}$$

当 $a=0$ 且 $b=5$ 时,有无穷多解:

$$\begin{cases} x_1=c, \\ x_2=-\dfrac{1}{3}, \quad (c \text{ 为任意常数}). \\ x_3=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

习题 3-2

1. (1) $[23,18,17]$;　(2) $[12,12,11]$.

2. (1) $[-4,0,-5,-9]$;　(2) $\left[7,-5,\dfrac{11}{2},\dfrac{27}{2}\right]$.

3. $[1,2,3,4]$.

习题 3-3

1. (1) $\boldsymbol{\beta}=-11\boldsymbol{\alpha}_1+14\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3$;　(2) $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+5\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4$.

2. (1) 线性相关;　(2) 线性无关.

3～4. 略.

习题 3-4

1. (1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为极大无关组; $\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$;
   (2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为极大无关组; $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3$.

2. (1) 极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$;秩为 4;
   (2) 极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$;秩为 4.

3～4. 略.

习题 3-5

1. (1) $\boldsymbol{\eta}=c_1\begin{bmatrix}8\\-6\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-7\\5\\0\\1\end{bmatrix}$ (c_1,c_2 为任意常数);

   (2) $\boldsymbol{\eta}=c_1\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ (c_1,c_2,c_3,为任意常数).

2. (1) $\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}8\\-6\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-7\\5\\0\\1\end{bmatrix}$($c_1,c_2$ 为任意常数)；

(2) $\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\-2\end{bmatrix}$($c$ 为任意常数).

3. (1) $k=-2$,无解；$k\neq1$ 且 $k\neq-2$ 有唯一解；$k=1$ 时有无穷多组解,其通解为：

$$\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}(c_1,c_2\text{ 为任意常数})；$$

(2) $k\neq1$ 且 $k\neq-2$ 无解;无唯一解；$k=1$ 时有无穷多组解,其通解为：

$$\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}(c\text{ 为任意常数}).$$

4. 略.

习题 3-6

(1) $\begin{cases}x_1=1\\x_2=1;\\x_3=1\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x_1=3-c\\x_2=1-c,c\text{ 为任意常数；}\\x_3=c\end{cases}$ (3) 线性方程组无解.

总 习 题 3

1. $\boldsymbol{\gamma}=\left[\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right]^{\mathrm{T}}$.

2. $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$.

3. (1) $a=\frac{3}{2}(1-b),a\neq0,b\neq1;\boldsymbol{\beta}=-5\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$；

(2) $a=0$,或 $b=1$ 或 $a\neq0,b\neq1$,且 $a\neq\frac{3}{2}(1-b)$.

4. (1) 线性相关； (2) 线性相关； (3) 线性无关； (4) 线性无关.

5. s 为奇数时线性无关,s 为偶数时线性相关.

6～8. 略.

9. (1) 秩为 2,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为极大无关组,$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$；

(2) 秩为 3,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为极大无关组,$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-5\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_4$.

10. (1) 秩为 3,线性相关;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为极大线性无关组;

(3) $\boldsymbol{\alpha}_4=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$.

11. (1) 基础解系为:$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}2\\0\\-5\\7\end{bmatrix}$;

通解为:$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2$($c_1,c_2$ 为任意常数).

(2) 基础解系为:$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}1\\-5\\0\\0\\3\end{bmatrix}$;

通解为:$x=c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2+c_3\boldsymbol{\eta}_3$($c_1,c_2,c_3$ 为任意常数).

12. (1) $\boldsymbol{x}=c\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$,$c$ 为任意常数;

(2) $\boldsymbol{x}=c\begin{bmatrix}5\\-7\\5\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}\\0\end{bmatrix}$,$c$ 为任意常数.

13. $b\neq-2$ 时,方程组无解;

当 $b=-2$ 时,

若 $a\neq-8$,$\boldsymbol{x}=c\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$($c$ 为任意常数);

若 $a=-8$,$\boldsymbol{x}=c_1\begin{bmatrix}4\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$($c_1,c_2$ 为任意常数).

第 4 章

习题 4-1

1. (1) $e_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}, e_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\-4\\5\end{bmatrix}, e_3=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$.

   (2) $e_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, e_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}, e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$.

2. (1) 不是正交矩阵; (2) 是正交矩阵.
3. 略.
4. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$.

习题 4-2

1. $\lambda_1=-1, \lambda_2=0, \lambda_3=9, p_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, p_2=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}, p_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$.
2. 略.
3. (1) $-2,8,-4$; (2) 64; (3) -72.
4. 0 或 1.

习题 4-3

1. 略.
2. $x=3$.
3. $y=1$.
4. $a=-2, b=6, \lambda_1=-4$.

习题 4-4

(1) $P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}, P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

习题 4-5

(1) $\lambda_1=-7$ 所对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix} 0.3333 \\ 0.6667 \\ -0.6667 \end{bmatrix}$；

$\lambda_2=\lambda_3=2$ 所对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix} 0.9339 \\ -0.3304 \\ 0.1365 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix} -0.1293 \\ -0.6681 \\ -0.7327 \end{bmatrix}$.

(2) $\lambda_1=\lambda_2=1$ 所对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$；

$\lambda_3=2$ 所对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0 \\ -0.7071 \end{bmatrix}$.

总 习 题 4

1. (1) $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{6}$，$\|\boldsymbol{\beta}\|=\sqrt{11}$，$\|\boldsymbol{\gamma}\|=\sqrt{5}$，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})=0$；
   (2) $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 及 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 均两两正交.
2. $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2$，其中 $\boldsymbol{\beta}=[1,-3,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=[-2,-1,0,1]^{\mathrm{T}}$，$k_1,k_2$ 是任意实数.
3. 略.
4. $a=-5,b=4$.
5. $\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{6}$.
6. $a=5,b=6$；$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.
7. (1) -4；　　(2) $\frac{1}{2}$.
8. (1) $\boldsymbol{\beta}_1=[1,2,2,-1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=[2,3,-3,2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=[2,-1,-1,-2]^{\mathrm{T}}$；
   (2) $\boldsymbol{\beta}_1=[1,-2,2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\left[-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=[6,-3,-6]^{\mathrm{T}}$.
9. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

10. (1) 是； (2) 是.

11. (1) $Q=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$, $Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$;

(2) $Q=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, $Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 8 \end{bmatrix}$.

12. (1) 0； (2) 0； (3) 0； (4) 0.

13. (1) $\boldsymbol{\alpha}_3=c[1,0,1]^{\mathrm{T}}$($c$ 为任意非零实数).

(2) $A=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 13 & -2 & 5 \\ -2 & 10 & 2 \\ 5 & 2 & 13 \end{bmatrix}$.

14. $k=1$ 或 $k=-2$.

15. 略.

第 5 章

习题 5-1

1. (1),(3),(4).

2. (1) $f(x,y,z)=(x,y,z)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$;

(2) $f=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$.

3. $x_1^2-x_3^2-2x_1x_2-6x_1x_3+2x_2x_3$.

4. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

5. 3.

6. (1) $f=2y_1^2-y_2^2+4y_3^2$； (2) $f=y_1^2-y_2^2+y_3^2$.

7. D.

习题 5-2

1. (1) $f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$,其中 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$;

(2) $f=y_1^2-y_2^2-y_3^2$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$,其中 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

2. (1) $f=z_1^2+z_2^2-z_3^2$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$,其中 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$;

(2) $f=2z_1^2-\frac{1}{2}z_2^2+4z_3^2$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$,其中 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&-1/2&2\\1&1/2&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

3. (1) $f=9y_1^2+18y_2^2+18y_3^2$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$,其中 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1/3&-2/\sqrt{5}&-2/\sqrt{45}\\2/3&1/\sqrt{5}&-4/\sqrt{45}\\2/3&0&5/\sqrt{45}\end{bmatrix}$;

(2) $f=y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2-\frac{1}{2}y_3^2$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$,其中 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&-2/\sqrt{6}\end{bmatrix}$.

4. 正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$,其中

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}&0&2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\end{bmatrix},$$

标准方程为 $4x'^2+3y'^2+z'^2=1$.

习题 5-3

1. $f=z_1^2-z_2^2+z_3^2$.
2. 2 和 1.
3. (1) 二次型的规范形为 $f=z_1^2-z_2^2+z_3^2$,正惯性指数为 2,秩为 3.
   (2) 二次型的规范形为 $f=z_1^2-z_2^2$,正惯性指数为 1,秩为 2.
   (3) 二次型的规范形为 $f=-z_1^2+z_2^2$,正惯性指数为 1,秩为 2.

习题 5-4

1. (1) 负定二次型; (2) 不定二次型.
2. (1) $-0.8<a<0$; (2) $a>2$.
3. $-3<a<1$.

4~5. 略.

习题 5-5

1. (1) $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$;　　(2) $f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2$.
2. (1) 负定;　　(2) 负定.

总 习 题 5

1. $m=3$.
2. 正交矩阵为 $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6+2\sqrt{3}} & 1/\sqrt{6-2\sqrt{3}} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6+2\sqrt{3}} & 1/\sqrt{6-2\sqrt{3}} \\ 0 & 1+\sqrt{3}/\sqrt{6+2\sqrt{3}} & 1-\sqrt{3}/\sqrt{6+2\sqrt{3}} \end{bmatrix}$.
3. 可逆线性变换为 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{y}$,标准型为 $f=6y_1^2+\frac{9}{2}y_2^2$.
4. 正交变换 $\boldsymbol{x}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{y}$.
5. $a=3,b=1$;所用的正交变换矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.
6. $2y_1^2+2y_2^2+2y_3^2$.
7. 椭球面.
8. 略.
9. 正定.
10. $-1<a<0$.
11～12. 略.
13. 是正定矩阵.
14. 略.
15. $a=0,b=0$.

第 6 章

习题 6-1

1. (1) 不是线性空间;(2) 是线性空间;(3) 是线性空间;(4) 是线性空间.
2. (1) W_1 是 $L(\mathbf{R})$的子空间.因为两个连续函数的和及数乘连续函数仍为连续函数.
   (2) W_2 是 $L(\mathbf{R})$的子空间.因为两个奇函数的和及数乘奇函数仍为奇函数.
   (3) W_3 是 $L(\mathbf{R})$的子空间.因为 W_3 非空,且对任意 $f,g\in W_3,\lambda\in\mathbf{R}$,有
$$(f+g)(0)=f(0)+g(0)=f(1)+g(1)=(f+g)(1);$$

$$\lambda f(0)=\lambda(f(0))=\lambda(f(1))=(\lambda f)(1),$$

故 $f+g,\lambda f\in W_3$.

3. (1) 是. 因 W_1 是齐次方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 的全体解向量.

(2) W_2 不是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间. 因 W_2 对加法不封闭.

(3) W_3 不是子空间. 因对数乘运算不封闭.

习题 6-2

1. 令 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 表示 i 行 j 列位置元素是 1 其余是零的 $m\times n$ 矩阵. 它们做成 $M_{m\times n}(\mathbf{R})$ 的一个基, 故 $M_{m\times n}(\mathbf{R})$ 的维数是 $m\times n$.

2. 由 $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{A}$. 得 $|\mathbf{A}|=1+(-1)^{n+1}$.

当 n 为偶数时, $|\mathbf{A}|=0$, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关, 它不构成基.

当 n 为奇数时, $|\mathbf{A}|\neq 0$, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关, 它构成一个基.

3. 坐标为 $(1,0,-1,0)$.

习题 6-3

1. 过渡矩阵 $\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的坐标是 (x_3,x_2,x_1).

2. 过渡矩阵为 $\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$.

3. (1) 过渡矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix}$, 向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在所指基下的坐标为

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\frac{1}{27}\begin{bmatrix}12&9&-27&-33\\1&12&-9&-23\\9&0&0&-18\\-7&-3&9&26\end{bmatrix}.$$

(2) 过渡矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$, 向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在所指基下的坐标为 $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}3\\5\\-2\\-3\end{bmatrix}$.

4. 向量 $\boldsymbol{\xi}=(k,k,k,k)^{\mathrm{T}}$, k 是非零常数.

习题 6-4

1. (1) $T(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}-7x_1+19x_2\\x_2\end{bmatrix}$.

(2) $T(\boldsymbol{e}_1)=-7\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2, T(\boldsymbol{e}_2)=19\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$.

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-7 & 19\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

2. (1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$.　　(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(3x^2+8x+8)\mathrm{e}^x$.

3. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-79 & -80 & -160\\ 48 & 50 & 96\\ 16 & 16 & 35\end{bmatrix}$.

4. 略.

总 习 题 6

1. (1) 能构成；　(2) 不能构成；　(3) 不能构成；　(4) 能构成.

2. 略.

3. 这个空间的维数为 5,所求空间的一组基为：

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}_2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{X}_4=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}_5=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

4. (1)，(2) 略；(3) 过渡矩阵为$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$；

(4) 在两个基的坐标分别是$\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$.

5. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

6. 略.

7. (1) 略；(2) 过渡矩阵$\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$；

(3) 变换公式 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

8. (1) ①不是线性变换,其他均为线性变换;

(2) 不是线性变换;

(3) 是线性变换.

9. (1) $\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ \frac{1}{k}a_{21} & a_{22} & \frac{1}{k}a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{B}_3 = \begin{bmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{11}+a_{22}-a_{12} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \\ a_{31}+a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

10. 略.